

## Структура и эволюция сферической пылевой звезды. 1. Модифицированное решение Оппенгеймера-Снайдера

Захид Закир<sup>1</sup>

### Аннотация

В решении Оппенгеймера-Снайдера (ОС) уравнение параболической траектории частиц  $r(t,R)$  в мировом времени  $t$  отличается от стандартного уравнения траектории в поле Шварцшильда вне и на поверхности пылевой звезды. Это - следствие того, что уравнения траектории были заданы на «гиперповерхности однородности», когда  $r=R$  при нулевом начальном моменте собственного времени во всех слоях, но эти события неодновременны и начальные моменты мирового времени  $t(R)$  отличны от нуля. Ввиду того, что структура звезды в данный момент означает определение положений всех частиц на гиперповерхности  $t=\text{const}$ , а решение ОС используется для настройки более реалистичных моделей звёзд, такая незавершённость процедуры перехода на гиперповерхность  $t=\text{const}$  приводит к искажениям физических следствий и других моделей. Предложена более последовательная реализация метода ОС, где эта проблема не возникает. Модификация состоит в фиксации начальных положений  $r=R$  при  $t(R)=0$  и определении сдвига моментов собственного времени в разных слоях на гиперповерхностях  $t=\text{const}$  из условия соблюдения стандартного уравнения траектории. Приведены графики траекторий частиц пылевой звезды  $r(t,R)$ , которые наглядно показывают внутреннюю структуру звезды при  $t=\text{const}$ . При больших  $t$  не только поверхность асимптотически приближается к гравитационному радиусу, но и мировые линии частиц во внутренних слоях также приближаются к своим асимптомам, быстро становясь практически параллельными мировым линиям частиц в центре и на поверхности. Это показывает, что картина застывшей звезды относится не только к поверхности, но и к внутренним слоям, застывающим на определённых расстояниях от центра.

PACS: 04.20.Dg; 04.70.-s; 97.60.-s, 98.54.-h

Ключевые слова: релятивистские звёзды, гравитационный коллапс, чёрные дыры

### Содержание

Введение.....	2
1. Траектории в поле Шварцшильда и решение Толмана для пылевого шара .....	3
1.1. Траектории частиц в поле Шварцшильда .....	3
1.2. Общее решение Толмана для пылевого шара в сопутствующих координатах.....	5
2. Решение ОС: однородный шар с параболической скоростью .....	6
2.1. Метрика и траектории во внешней области.....	6
2.2. Метрика и траектории во внутренней области .....	7
3. Модифицированный метод ОС .....	9
3.1. Проблема сдвига времён в уравнении траектории в методе ОС.....	9
3.2. Модификация метода ОС для внешней области .....	10
3.3. Модификация метода ОС для внутренней области.....	11
4. Внутренняя структура и эволюция пылевой звезды .....	12
4.1. Траектории частиц в слоях и их асимптотика .....	12
4.2. Внутренняя метрика и её асимптотика.....	14
Заключение .....	15
Благодарности .....	15
Приложение .....	15
Литература.....	16

---

<sup>1</sup> *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан, zahidzakir@theor-phys.org*

## Введение

Внутренняя структура коллапсирующих звёзд с массой  $M > 3M_{\odot}$ , когда доминирует гравитация, является одной из главных проблем релятивистской астрофизики [1-8]. В общей теории относительности (ОТО) картина сжатия усложнена эффектами релятивистской кинематики и релятивистской гравитации. Тем не менее, для сферической звезды с однородной пылевой материей и с диагональной метрикой эта задача оказалась точно решаемой [2-5] и поэтому структура такой звезды считалась хорошо известной [6-8].

Однако, в действительности почти все модели коллапса такой звезды включали некие локальные преобразования координат, которые затрудняли или не позволяли определение структуры звезды в целом [4-8]. Дело в том, что определение структуры звезды «в данный момент» означает задание положений всех частиц звезды как совокупности одновременных событий, заданных на глобальной гиперповерхности одновременности. При диагональной метрике такие гиперповерхности могут быть выбраны многими способами, но каждый способ должен сохранять исходные симметрии и упрощающие предположения, которые и позволяли найти точные решения. К тому же на поверхности звезды внутренняя метрика должна сшиваться с внешней метрикой Шварцшильда.

На практике оказалось, что при этом не удаётся совместить исходные упрощающие предположения с условиями для определения структуры звезды в целом. В частности, точные решения можно найти при описании событий в локальных сопутствующих координатах  $(\tau, R, \theta, \varphi)$  на «гиперповерхностях однородности», когда в разных слоях одинаковы плотности и собственные времена («гиперповерхности одновозрастности»). Однако при этом скорости слоёв разные и поэтому у них нет единой гиперповерхности одновременности. Тем самым в сопутствующих координатах структура звезды в целом оказалась не определённой.

Если же метрику в сопутствующих координатах преобразовать в метрику в координатах Шварцшильда  $(t, r, \theta, \varphi)$ , заданных на глобальной гиперповерхности одновременности  $t = const.$ , что упрощает и сшивание на поверхности с внешней статической метрикой, то такая метрика оказывается либо заданной в разных слоях в разные моменты мирового времени [5-7], либо недиагональной и требовалась сложная процедура диагонализации [8]. В обоих случаях оказывается опять нет единой гиперповерхности одновременности - либо из-за локальных сдвигов начала мирового времени, либо локальных преобразований времени при диагонализации. В частности, в решении Оппенгеймера-Снайдера (ОС) для параболической скорости [5] уравнение траектории  $r(t, R)$  вне и на поверхности звезды отличается от стандартного уравнения в поле Шварцшильда, что недопустимо и свидетельствует о незавершённости процедуры представления точных решений в координатах  $r, t$ .

Таким образом, очевидная на первый взгляд задача определения мгновенной структуры пылевой звезды в рамках ОТО оказывается нетривиальной проблемой, требующей более внимательного анализа и учёта физических условий коллапса.

Поскольку модель ОС используется как стандартная нормировочная модель, на которой апробируются как аналитические, так и численные модели релятивистских звёзд, то следствия неточностей в этой модели выходят далеко за рамки её самой и искажают физические следствия также и более реалистичных моделей релятивистской астрофизики.

Целью данной статьи является усовершенствование модели ОС путём более последовательной реализации метода ОС для достижения согласования условий диагональности метрики с корректными уравнениями траекторий частиц в поле Шварцшильда.

В исходном методе ОС [5] решения  $r(\tau, R)$  взяты для событий на «гиперповерхности однородности», где начальные моменты собственного времени  $\tau$  в разных слоях одинаковы и  $r(0, R) = R$  при  $\tau_0(R) = 0$ . Но эти события неодновременны и  $t_0(R) \neq 0$ , так что определение структуры звезды в целом оказывается под вопросом. Предложенная модификация метода ОС состоит в рассмотрении таких решений  $r(t, R)$  на гиперповерхности одновременности, чтобы  $r(0, R) = R$  было при  $t_0(R) = 0$ . Тогда начальные моменты собственного времени в разных слоях имеют сдвиги  $\tau_0(R) \neq 0$  и они находятся из условия соблюдения стандартного уравнения траектории в поле Шварцшильда. Тем самым, если диагональность метрики позволяет найти точное решение задачи, то взятие одновременных событий на физических траекториях частиц позволяет определять структуру пылевой звезды в целом в любой момент  $t = const$ .

В разделе II приведены основные соотношения для траекторий частиц в поле Шварцшильда и решения Толмана для пылевого шара. В разделе III излагается метод ОС и приведены их решения, обсуждается проблема сдвига времён в уравнениях траекторий. В разделе IV излагается модификация метода ОС, в которой этой проблемы нет. В разделе V изучены структура и эволюция пылевой звезды, приведены графики мировых линий и метрики в исходной и модифицированной моделях ОС.

## 1. Траектории в поле Шварцшильда и решение Толмана для пылевого шара

### 1.1. Траектории частиц в поле Шварцшильда

Пространственно-временной интервал вне и на поверхности сферической звезды  $r \geq r_b$  (где  $r_b$  - окружной радиус поверхности) в статических координатах даётся решением Шварцшильда [1]:

$$ds^2 = \alpha dt^2 - \alpha^{-1} dr^2 - r^2 d^2\Omega, \quad (1)$$

где  $\alpha \equiv 1 - r_g / r$ ,  $r_g = 2GM$  и угловая часть  $d^2\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ .

Рассмотрим радиальное падение пробных частиц в этом поле с начальными координатами  $r(t_0) = R > R_b$  в момент  $t_0 = 0$ . Их локальные скорости имеют вид:

$$v^2 = \frac{1}{(1 - r_g / r)^2} \frac{dr^2}{dt^2}. \quad (2)$$

В статическом поле энергия частицы сохраняется и при параболической скорости, когда скорость свободного падения такова, что занулилась бы на пространственной бесконечности, это даёт:

$$\frac{1 - r_g / r}{1 - v^2} = 1, \quad v = -r_g^{1/2} / r^{1/2}. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) находим для интервала собственного времени частицы:

$$d\tau^2 = \frac{dr^2}{1 - r_g / r} \left( \frac{1}{v^2} - 1 \right) = \frac{r}{r_g} dr^2, \quad (4)$$

откуда следует:

$$\tau - \tau_0(R) = \frac{2}{3r_g^{1/2}} (R^{3/2} - r^{3/2}). \quad (5)$$

Уравнение для траектории  $r(\tau, R)$ , таким образом, имеет вид:

$$r(\tau, R) = \left( R^{3/2} - \frac{3}{2} r_g^{1/2} [\tau - \tau_0(R)] \right)^{2/3}. \quad (6)$$

Для интервала мирового времени  $t$  из (2) и (3) следует

$$t = -\frac{1}{r_g^{1/2}} \int_R^{r(t)} \frac{dr r^{3/2}}{r - r_g} = \frac{1}{r_g^{1/2}} \int_{r(t)}^R \frac{dr r^{3/2}}{r - r_g} \quad (7)$$

и интегрирование даёт:

$$t = \frac{2}{3r_g^{1/2}} (R^{3/2} - r^{3/2}) + 2r_g^{1/2} (R^{1/2} - r^{1/2}) + r_g \ln \left( \frac{r^{1/2} + r_g^{1/2}}{r^{1/2} - r_g^{1/2}} \cdot \frac{R^{1/2} - r_g^{1/2}}{R^{1/2} + r_g^{1/2}} \right). \quad (8)$$

Выражение (8) и есть уравнение для траектории  $r(t, R)$  в неявном виде.

Времена  $\tau$  и  $t$  есть две параметризации одних и тех же событий вдоль мировой линии частицы  $r(\tau, R) = r(t, R)$  и поэтому эти два времени взаимно связаны, а необратимое замедление  $\tau$  относительно  $t$  - это экспериментальный факт (см. [9]). Эта связь  $\tau(t, R)$  в неявном виде  $t(\tau, R)$  следует из (6) и (8):

$$t = \tau - \tau_0(R) + 2r_g^{1/2} [R^{1/2} - r^{1/2}(\tau, R)] + r_g \ln \left( \frac{r^{1/2}(\tau, R) + r_g^{1/2}}{r^{1/2}(\tau, R) - r_g^{1/2}} \cdot \frac{R^{1/2} - r_g^{1/2}}{R^{1/2} + r_g^{1/2}} \right). \quad (9)$$

График связи двух времён  $\tau(t, R)$  приведён на Рис. 1. Точки на них с  $t = const.$  соответствуют одновременным событиям, а с  $\tau = const.$  - «одновозрастным». В графиках траекторий  $r(t, R)$  и  $r(\tau, R)$  (Рис. 2) видно, что имеет место один к одному соответствие между событиями на обеих кривых  $r(t, R) = r(\tau, R)$  и поэтому обе кривые являются асимптотическими, т.е. при  $t \rightarrow \infty$  обе они асимптотически приближаются к гравитационному радиусу  $r(t, R) \rightarrow r_g$  и  $r[\tau(t, R)] \rightarrow r_g$ . При  $t \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow r_g$  моменты застывания собственных времён  $\tau \rightarrow \tau_g$  находим из (5):

$$\tau_g(R) = \tau_0(R) + \frac{2}{3r_g^{1/2}} (R^{3/2} - r_g^{3/2}). \quad (10)$$

Плотности пробных частиц, если они изначально были распределены однородно, в дальнейшем также останутся однородными на гиперповерхности одновозрастности, из-за чего её и называют «гиперповерхностью одновозрастности».

Точки пересечения линий «одновозрастности» с мировыми линиями даются выражением (9).

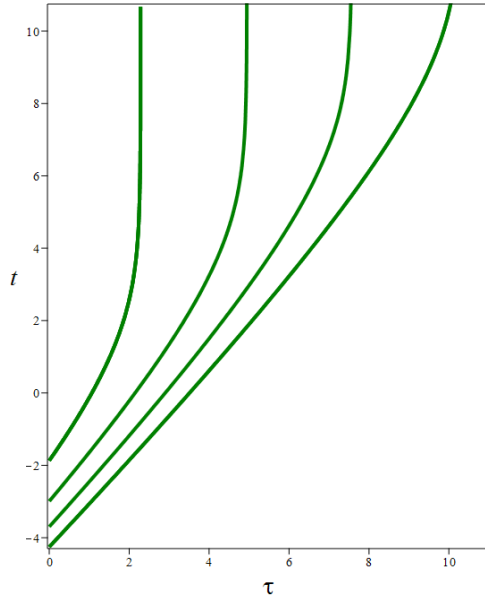


Рис.1. Собственные времена пробных частиц  $\tau = \tau[r(t)] = \tau(t)$  находившихся при  $t = 0$  на  $R = 2, 3, 4, 5$  (в единицах  $r_g$ ) при  $t \gg r_g$  асимптотически застывают (см.[9])

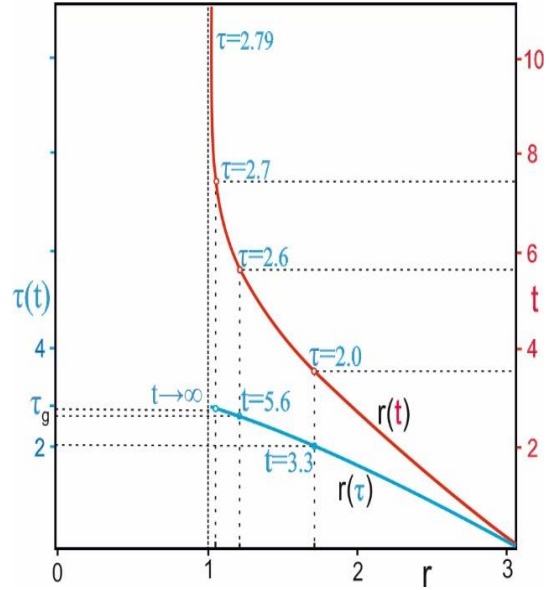


Рис 2. Мировая линия падающей пробной частицы  $r(t) = r(\tau)$  в терминах мирового времени  $t$  и собственного времени  $\tau$ .

## 1.2. Общее решение Толмана для пылевого шара в сопутствующих координатах

Внутри пылевой звезды ( $r < r_b$ ) линейный элемент в сопутствующих координатах приобретает вид:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, R)} dR^2 - r^2(\tau, R) d\Omega^2. \quad (11)$$

Здесь  $2\pi r(\tau, R)$  - длина окружности вокруг звезды.

Решения уравнений Эйнштейна с такой метрикой были найдены в общем виде Толманом [4]. Они содержат две неизвестные функции от начальных координат слоёв  $f(R)$  и  $F(R)$  (в обозначениях [7]), и поэтому для нахождения точных решений требовалось конкретизировать физические условия для падающей пыли. Для наших целей это – параболические скорости и однородность.

При обозначении производной по  $\tau$  точкой, а по  $R$  штрихом, решение Толмана имеет вид:

$$e^\lambda = r'^2 / (1 + f), \quad \dot{r}^2 = f + F / r, \quad 8\pi G \rho = \frac{F'}{r' r^2}. \quad (12)$$

Здесь  $1 + f > 0$ ,  $G$  - гравитационная константа,  $\rho$  - плотность энергии пылевой материи. Интегрирование (12) даёт:

$$\tau = \pm \int \frac{dr}{(f + F / r)^{1/2}}. \quad (13)$$

Для параболического движение  $f = 0$  и получаем аналог выражения для собственного времени (5):

$$\tau - \tau_0(R) = \frac{2}{3F^{1/2}}(R^{3/2} - r^{3/2}). \quad (14)$$

Итак, линейный элемент в решении Толмана приобретает вид:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - r'^2 dR^2 - r^2(\tau, R) d\Omega^2. \quad (15)$$

## 2. Решение ОС: однородный шар с параболической скоростью

### 2.1. Метрика и траектории во внешней области

Оппенгеймер и Снайдер [5] изучили это решение для частного случая, когда а) пылевой шар однороден в сопутствующих координатах, и б) частицы пыли падают с параболической скоростью и  $f(R) = 0$ . Преобразовав решения Толмана в координаты  $r, t$ , им удалось найти точные решения в этих координатах для внутренней метрики и траекторий, а также сшить их на поверхности с внешней метрикой Шварцшильда.

Решения Толмана внутри однородной звезды в сопутствующих координатах, естественно, совпадают с известными ранее из космологии решениями Фридмана для плоского случая. Позднее другими авторами были применены фридмановские решения также и для положительной и отрицательной кривизны, которые соответствовали эллиптическим ( $f < 0$ ) и гиперболическим ( $f > 0$ ) скоростям. В литературе все они также именуются решениями ОС [6-8] ввиду условия однородности, использованного ОС при получении параболических решений.

Рассмотрим пробные частицы вне звезды  $r > r_b$  падающие с параболическими скоростями. Поскольку метрика во внешней области известна и даётся решением Шварцшильда (1), то будем исходить из него и преобразуем его из координат  $r, t$  в координаты  $R, \tau$ .

Интервалы  $r, t$  выразим через интервалы  $R, \tau$  в виде:

$$dt = \dot{t} d\tau + t' dR, \quad dr = \dot{r} d\tau + r' dR. \quad (16)$$

При этом линейный элемент (1) переходит в:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \alpha dt^2 - \alpha^{-1} dr^2 - r^2 d^2\Omega = \\ &= (\alpha \dot{t}^2 - \alpha^{-1} \dot{r}^2) d\tau^2 - (\alpha^{-1} r'^2 - \alpha t'^2) dR^2 + \\ &+ 2(\alpha \dot{t} t' - \alpha^{-1} \dot{r} r') d\tau dR - r^2(\tau, R) d^2\Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения для компонент метрики в координатах  $R, \tau$  также известны из (15) и вместе с (17) они дают два уравнения для определения  $\dot{t}$ ,  $t'$ , а также условие диагональности метрики:

$$g_{00}(\tau, R) = \alpha \dot{t}^2 - \alpha^{-1} \dot{r}^2 = 1, \quad (18)$$

$$g_{11}(\tau, R) = -(\alpha^{-1} r'^2 - \alpha t'^2) = -r'^2, \quad (19)$$

$$g_{01}(\tau, R) = \alpha \dot{t} t' - \alpha^{-1} \dot{r} r' = 0. \quad (20)$$

Учитывая  $F = r_g$ , из (3), (12), (18) и (19) находим  $\dot{r}$ ,  $\dot{t}$  и  $t'$ :

$$\dot{r} = -r_g^{1/2} / r^{1/2}, \quad \dot{t} = \alpha^{-1}, \quad t'^2 = r'^2 \alpha^{-2} r_g / r. \quad (21)$$

В статье ОС [5] в выражении (14) выбран частный случай с  $\tau_0(R) = 0$  (гиперповерхность одновозрастности) и уравнение траектории взято в виде:

$$r(\tau, R) = (R^{3/2} - 3r_g^{1/2}\tau / 2)^{2/3}. \quad (22)$$

Отсюда следуют выражения для  $r'$  и  $t'$ :

$$r' = \frac{R^{1/2}}{r^{1/2}}, \quad t' = -\frac{(r_g R)^{1/2}}{r - r_g}. \quad (23)$$

Условие диагональности метрики (20) в результате приобретает вид:

$$\frac{t'}{t} = r' \dot{r} = -\frac{(r_g R)^{1/2}}{r}. \quad (24)$$

Это условие, однако, оказалось несовместимым с уравнением траектории в поле Шварцшильда (8) и в статье ОС [5] было использовано другое уравнение траектории, которое согласуется с (24):

$$t = \frac{2}{3r_g^{1/2}}(R^{3/2} - r^{3/2}) - 2r_g^{1/2}r^{1/2} + r_g \ln \frac{r^{1/2} + r_g^{1/2}}{r^{1/2} - r_g^{1/2}}. \quad (25)$$

Из (22) следует, что  $r = R$  при  $\tau = 0$  и тогда (25) даёт:

$$t_0(R) = -2r_g^{1/2}R^{1/2} - r_g \ln \frac{R^{1/2} - r_g^{1/2}}{R^{1/2} + r_g^{1/2}}, \quad (26)$$

т.е. при  $r = R$  в разных слоях мировое время имеет разное значение  $t_0(R) \neq 0$ . Таким образом, в исходном методе ОС [5] в качестве начальных взяты события с  $\tau_0(R) = 0$ , в результате чего уравнение траектории (25), в отличие от (9), содержит сдвиги  $t_0(R) \neq 0$ .

## 2.2. Метрика и траектории во внутренней области

В предыдущем разделе из решений, известных в координатах  $r, t$  были получены решения в терминах  $R, \tau$ . Здесь же, следуя [5], сделаем обратное преобразование – из внутреннего решения Толмана в терминах  $R, \tau$  получим решение в терминах  $r, t$ . Это необходимо как для определения структуры звезды в целом, так и для сшивания с внешней метрикой (1).

Линейный элемент внутри звезды с искомой метрикой имеет вид:

$$ds^2 = e^{v(r,t)} dt^2 - e^{\lambda(r,t)} dr^2 - r^2 d^2\Omega, \quad r \leq r_b \quad (27)$$

и сшивание на поверхности должно дать  $e^{v(r_b,t)} = e^{-\lambda(r_b,t)} = 1 - r_g / r_b$ . Из (16) следует:

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^v dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d^2\Omega = \\ &= (e^v \dot{t}^2 - e^\lambda \dot{r}^2) d\tau^2 - (e^\lambda r'^2 - e^v t'^2) dR^2 + 2(e^v \dot{t} t' - e^\lambda \dot{r} r') d\tau dR - r^2 d^2\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Полагая как и во внешней области  $f = 0$ , из соответствия с (15) получаем условия:

$$g_{00}(\tau, R) = e^v \dot{t}^2 - e^\lambda \dot{r}^2 = 1, \quad (29)$$

$$g_{11}(\tau, R) = -(e^\lambda r'^2 - e^v t'^2) = -r'^2, \quad (30)$$

$$g_{01}(\tau, R) = e^v \dot{t} t' - e^\lambda \dot{r} r' = 0. \quad (31)$$

Первые две из них дают:

$$e^\lambda = \frac{\dot{t}^2 r'^2 + t'^2}{\dot{t}^2 r'^2 - t'^2 \dot{r}^2}, \quad e^v = \frac{r'^2 (1 + \dot{r}^2)}{\dot{t}^2 r'^2 - t'^2 \dot{r}^2}, \quad (32)$$

а третья (31) есть условие диагональности, которое с учётом (32) принимает вид:

$$g_{01} = \frac{\dot{t} t' r'^2 (1 + \dot{r}^2) - (\dot{t}^2 r'^2 + t'^2) \dot{r} r'}{\dot{t}^2 r'^2 - t'^2 \dot{r}^2} = 0. \quad (33)$$

Записав числитель (33) как уравнение для  $t'$ :

$$\dot{t} t'^2 - [\dot{t} r' (1 + \dot{r}^2)] t' + \dot{t}^2 r'^2 = 0, \quad (34)$$

получаем два решения

$$t' = \frac{\dot{t} r'}{2\dot{r}} (1 + \dot{r}^2) \pm \frac{\dot{t} r'}{2\dot{r}} (1 - \dot{r}^2). \quad (35)$$

Из них первое  $t' = \dot{t} r' / \dot{r}$  является нефизическим, так как расходится при  $\dot{r} \rightarrow 0$ , а второе даёт условие диагональности такое же, как и во внешней области:

$$t' / \dot{t} = r' \dot{r}. \quad (36)$$

Исключив с его помощью  $t'$  из (32), получаем решение для метрики:

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - \dot{r}^2}, \quad e^\nu = \frac{1}{\dot{t}^2 (1 - \dot{r}^2)}. \quad (37)$$

Условие однородности даёт для функции  $F(R)$ :

$$F(R) = r_g \frac{R^3}{R_b^3} \equiv r_{g,R}. \quad (38)$$

Как и вне звезды, в [5] выражение для  $\tau$  в (14) было выбрано с условием  $\tau_0(R) = 0$ :

$$\tau = \frac{2}{3r_{g,R}^{1/2}} (R^{3/2} - r^{3/2}). \quad (39)$$

Уравнение траектории  $r(\tau, R)$  тем самым принимает вид:

$$r(\tau, R) = R \left( 1 - \frac{3r_g^{1/2}}{2R_b^{3/2}} \tau \right)^{2/3}. \quad (40)$$

из которого следуют выражения для  $\dot{r}$  и  $r'$ :

$$\dot{r} = -\frac{r_{g,R}^{1/2}}{r^{1/2}}, \quad r' = \frac{r}{R}. \quad (41)$$

Для определения уравнения траектории  $r(t, R)$  в методе ОС [5] вводится новая переменная  $y$ :

$$t = M(y), \quad (42)$$

где вид функции  $M$  определяется из условия сшивания с внешней метрикой. Условие диагональности метрики (36) тогда приобретает вид:

$$\frac{t'}{\dot{t}} = \frac{y'}{\dot{y}} = \dot{r} r' = -\frac{(r_{g,R} r)^{1/2}}{R}. \quad (43)$$

Решение этого уравнения относительно  $y$  приведено в Приложении и результат имеет вид:

$$y(R, \tau) = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right) + \frac{R_b}{R r_g} r. \quad (44)$$

При этом  $y_b = y(R_b) = R_b / r_g$  и на поверхности функция  $M(y_b)$  должна совпадать с правой частью (25).



Произведя в (25) замены  $R \rightarrow R_b$  и  $r = r_g y_b$ , в [5] было получено уравнение траектории для частиц звезды:

$$t = \frac{2}{3r_g^{1/2}} (R_b^{3/2} - r_g^{3/2} y^{3/2}) - 2r_g y^{1/2} + r_g \ln \frac{y^{1/2} + 1}{y^{1/2} - 1}. \quad (45)$$

Для  $\dot{t}$  и  $t'$  это уравнение, с учётом  $y' = R/R_b^2$  и  $\dot{y} = -(R/rr_g R_b)^{1/2}$ , даёт:

$$\dot{t} = -\frac{r_g y^{3/2} \dot{y}}{y-1} = \left( \frac{r_g R}{R_b r} \right)^{1/2} \frac{y^{3/2}}{y-1}, \quad (46)$$

$$t' = -\frac{r_g y^{3/2} y'}{y-1} = -\frac{r_g R}{R_b^2} \frac{y^{3/2}}{y-1} \quad (47)$$

и условие диагональности (43) выполняется.

Итак, метод ОС состоит в переводе решения Толмана из сопутствующих координат в координаты  $r, t$  и далее сшивании на поверхности внутренней метрики с внешней. Метрика (37) вместе с уравнениями траектории (40)-(47) и есть внутреннее решение ОС.

### 3. Модифицированный метод ОС

#### 3.1. Проблема сдвига времён в уравнении траектории в методе ОС

Решение ОС, приведённое выше в деталях, основано на выборе  $r = R$  при нулевых начальных моментах собственного времени во всех слоях  $\tau_0(R) = 0$  в (39). Но тогда начальные значения положений частиц  $R$  в этих слоях заданы не одновременно, так как в (25)  $t_0(R) \neq 0$ . Физический смысл этого в том, что в статье ОС [5] решение Толмана, заданное в сопутствующих координатах на гиперповерхности одновозрастности  $\tau = const.$ , преобразовано в координаты  $r, t$  на той же самой гиперповерхности  $\tau = const.$

В результате решение ОС в терминах  $r, t$  оказалось заданным не на гиперповерхности  $t = const.$  Вместо событий с одинаковыми  $t$  взяты события содержащие сдвиг  $t_0(R)$  из (26) во внешней области и сдвиг  $t_0(R_b)$  внутри, где:

$$t_0(R_b) = -2r_g^{1/2} R_b^{1/2} - r_g \ln \frac{R_b^{1/2} - r_g^{1/2}}{R_b^{1/2} + r_g^{1/2}}. \quad (48)$$

Внешняя метрика Шварцшильда же определена при  $t = const.$ , где начальные положения  $r = R$  заданы при  $t_0(R) = 0$ . Кроме того, само определение структуры звезды в целом предполагает задание решений именно на этой гиперповерхности. Но в методе ОС это приводит к недиагональной метрике, с которой уравнения Эйнштейна практически не решаются.

На практике это проявляется в виде отличия траекторий, получаемых из решения ОС от траекторий реальных частиц при тех же физических условиях. Это и есть проблема сдвига времён в уравнении траектории в методе ОС.

Таким образом, хотя метод ОС стал большим шагом в правильном направлении, однако в данном вопросе он не доведён до логического завершения. Процедура получения точного решения задачи оказалась прерванной и в методе ОС недостаёт завершающих шагов.

Далее будет изложена требуемая модификация метода ОС с такими завершающими решение шагами, когда исходя из стандартного уравнения траектории (8) и соблюдая условие диагональности метрики получаются решения именно на гиперповерхности одновременности  $t = const$ .

### 3.2. Модификация метода ОС для внешней области

Последовательный переход к координатам  $r, t$  предполагает описание событий вдоль мировых линий частиц во всех слоях  $r(t, R)$  на гиперповерхности  $t = const$ . Поэтому первый шаг при модификации метода ОС состоит в переходе на эту гиперповерхность, что означает  $r = R$  при  $t_0(R) = 0$  с выбором уравнения траектории в стандартном виде (8). Но при этом в уравнении траектории (5)-(6) появятся локальные сдвиги  $\tau_0(R) \neq 0$ , что меняет величину  $r'$  по сравнению с (23):

$$r' = \frac{1}{r^{1/2}}(R^{1/2} + r_g^{1/2}\tau_0'). \quad (49)$$

Производные  $\dot{r}$  и  $\dot{t}$  тогда по-прежнему даются (21), но  $t'$ , следующий из уравнения траектории (8), теперь имеет вид:

$$t' = \frac{R^{3/2}}{r_g^{1/2}(R - r_g)} - \frac{r^{3/2}r'}{r_g^{1/2}(r - r_g)}. \quad (50)$$

Условие диагональности же с учётом (21) даёт:

$$t' = \dot{t}r' = -\frac{(r_g r)^{1/2}}{r - r_g}r'. \quad (51)$$

Первое выражение для  $t'$  в (50) следует из уравнения траектории (8), а второе выражение (51) - из диагональности метрики и для согласования этих двух физических условий оба выражения должны давать одно и то же значение для  $t'$ .

На первый взгляд это кажется проблематичным, так как эти два выражения различаются довольно существенно. Однако, теперь вспомним, что пока мы не определили значение  $r'$  в (49), поскольку ещё не уточнили чему равняются  $\tau_0(R)$ . Второй шаг в модификации метода ОС поэтому состоит в том, что  $r'$  и  $\tau_0(R)$  найдём из согласованности уравнения траектории и условия диагональности.

Для этого нам достаточно приравнять (50) и (51), что даёт уравнение для определения  $r'$ :

$$t' = \frac{R^{3/2}}{r_g^{1/2}(R - r_g)} - \frac{r^{3/2}r'}{r_g^{1/2}(r - r_g)} = -\frac{(r_g r)^{1/2}}{r - r_g}r'. \quad (52)$$

Решая это равенство относительно  $r'$  получаем для него искомое выражение:

$$r' = \frac{R^{1/2}}{r^{1/2}} \frac{R}{R - r_g}, \quad (53)$$

что отличается от (23). Из (49) и (53) тогда следует уравнение и для  $\tau_0(R)$ :

$$\tau_0' = \frac{(r_g R)^{1/2}}{R - r_g} \quad (54)$$

и интегрируя это выражение получаем:

$$\tau_0(R) = 2r_g^{1/2}R^{1/2} + r_g \ln \frac{R^{1/2} - r_g^{1/2}}{R^{1/2} + r_g^{1/2}}. \quad (55)$$

Таким образом, вне звезды начальные сдвиги  $\tau_0(R)$  в модифицированном методе ОС оказались равными, но обратными по знаку сдвигу  $t_0(R)$  метода ОС (26). Из (55) и (10) для моментов застывания собственных времён  $\tau_g(R)$  тогда получаем:

$$\tau_g(R) = \frac{2}{3r_g^{1/2}}(R^{3/2} - r_g^{3/2}) + 2r_g^{1/2}R^{1/2} + r_g \ln \frac{R^{1/2} - r_g^{1/2}}{R^{1/2} + r_g^{1/2}}. \quad (56)$$

Уравнение траектории (8) с учётом (5) и (55) принимает более простой вид:

$$t = \tau - 2r_g^{1/2}r^{1/2} + r_g \ln \frac{r^{1/2} + r_g^{1/2}}{r^{1/2} - r_g^{1/2}}. \quad (57)$$

Производная  $t'$ , вычисляемая из (57) отличается от (23) и теперь равна:

$$t' = -\frac{(r_g R)^{1/2}}{r - r_g} \frac{R}{R - r_g}. \quad (58)$$

Итак, модификация метода ОС сводится:

а) к выбору при  $r = R$  начальных времён как  $t_0(R) = 0$  и  $\tau_0(R) \neq 0$  как в (55), обратному прежнему методу ОС, где было  $t_0(R) \neq 0$  и  $\tau_0(R) = 0$ ,

б) к выбору стандартного уравнения траектории частиц в поле Шварцшильда (8) или (57), и

в) нахождению  $r'$  и  $\tau_0(R)$  из условия согласованности уравнения траектории и условия диагональности.

Эти завершающие шаги, добавляемые в метод ОС, обеспечивают как правильные уравнения траектории, так и необходимые изменения в  $r'$  и  $t'$ , нужные для выполнения условия диагональности на гиперповерхности одновременности.

### 3.3. Модификация метода ОС для внутренней области

Внутри однородной пылевой звезды решение (14) в первоначальном методе ОС выбрано с условием  $\tau_0(R) = 0$  и далее исходит из уравнения траектории (39)-(40).

В модифицированном метода ОС внутреннее решение (14) выберем с постоянным сдвигом на поверхности  $\tau_0(R_b) \neq 0$ , позволяющем сшить с внешним решением (5):

$$\tau - \tau_0(R_b) = \frac{2}{3r_{g,R}^{1/2}}(R^{3/2} - r^{3/2}), \quad (59)$$

где  $\tau_0(R_b)$ , согласно (55), равен:

$$\tau_0(R_b) = 2r_g^{1/2}R_b^{1/2} + r_g \ln \frac{R_b^{1/2} - r_g^{1/2}}{R_b^{1/2} + r_g^{1/2}}. \quad (60)$$

Вместо уравнения траектории ОС (40), соответственно, имеем уравнение траектории:

$$r(\tau, R) = R \left( 1 - \frac{3r_g^{1/2}}{2R_b^{3/2}} [\tau - \tau_0(R_b)] \right)^{2/3}, \quad (61)$$

так что производные  $\dot{r}$  и  $r'$  будут прежними (41), но теперь  $\tau_0' = 0$ .

В уравнении траектории для  $r(t, R)$ , согласно методу ОС, вместо  $R$  подставляется  $R_b$ , а вместо  $r$  подставляется  $r_g y$ , что даёт:

$$t = \frac{2}{3r_g^{1/2}} (R_b^{3/2} - r_g^{3/2} y^{3/2}) + 2r_g^{1/2} (R_b^{1/2} - r_g^{1/2} y^{1/2}) + r_g \ln \left( \frac{y^{1/2} + 1}{y^{1/2} - 1} \cdot \frac{R_b^{1/2} - r_g^{1/2}}{R_b^{1/2} + r_g^{1/2}} \right). \quad (62)$$

В отличие от использованного в [5] уравнения (45) это уравнение на поверхности сшивается с обычным уравнением траектории в поле Шварцшильда (8).

Производные  $\dot{t}$  и  $t'$  будут как прежде (46)-(47), так что условие диагональности метрики (43) будет выполняться и в модифицированном методе ОС. Форма выражения для внутренней метрики в решении ОС (37) не меняется, но в эти выражения входит  $r(t, R)$ , подчиняющееся уравнению (62), а не (45) и поэтому значения метрики уже будут иными.

## 4. Внутренняя структура и эволюция пылевой звезды

### 4.1. Траектории частиц в слоях и их асимптотика

При  $t \rightarrow \infty$  поверхность асимптотически приближается к гравитационному радиусу  $r_b \rightarrow r_g$  и в (8) доминирует растущий логарифмический член, что даёт во внешней области и на поверхности:

$$t \simeq -r_g \ln \left( \frac{r_b^{1/2} - r_g^{1/2}}{r_b^{1/2} + r_g^{1/2}} \right). \quad (63)$$

$$e^{-t/r_g} \simeq \frac{r_b - r_g}{(r_b^{1/2} + r_g^{1/2})^2} \simeq \frac{1}{4} \left( \frac{r_b}{r_g} - 1 \right), \quad (64)$$

$$r_b(t) \simeq r_g (1 + 4e^{-t/r_g}) > r_g. \quad (65)$$

В уравнениях траектории (45) и (62) асимптотика на поверхности та же, так как  $y_b \rightarrow 1$  и это даёт (65).

Во внутренних слоях рост логарифмического вклада также происходит при  $y \rightarrow 1$  и это даёт для асимптотики слоёв  $r(t, R) \rightarrow r(\infty, R)$  уравнение:

$$y(\infty, R) = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right) + \frac{R_b}{r_g R} r(\infty, R) = 1, \quad (66)$$

из которого следует:

$$r(\infty, R) = R \frac{3r_g}{2R_b} \left( 1 - \frac{R^2}{3R_b^2} \right) \sim R. \quad (67)$$

Как видим, линии асимптотик слоёв при  $t \rightarrow \infty$  расположены практически эквидистантно (Рис. 3).

Собственное время на каждом слое застывает при значении  $\tau_\infty(R)$ , которое находим подставив  $r(\infty, R)$  в (59):

$$\tau_\infty(R) = \tau_0(R_b) + \frac{2R_b^{3/2}}{3r_g^{1/2}} - \frac{3^{1/2}r_g}{2^{1/2}} \left(1 - \frac{R^2}{3R_b^2}\right)^{3/2} \quad (68)$$

Раньше всех слоёв застывает центр в момент  $\tau_\infty(0)$ :

$$\tau_\infty(0) = \tau_0(R_b) + \frac{2}{3} \left( \frac{R_b^{3/2}}{r_g^{3/2}} - \frac{3^{3/2}}{2^{3/2}} \right) r_g \quad (69)$$

Поверхность застывает позже всех слоёв при  $\tau_\infty(R_b)$ :

$$\tau_\infty(R_b) = \tau_0(R_b) + \frac{2}{3} \left( \frac{R_b^{3/2}}{r_g^{3/2}} - 1 \right) r_g \quad (70)$$

Интервал собственного времени, в течение которого застывают все слои пылевой звезды равен поэтому разнице между моментами застывания поверхности и центра:

$$\tau_\infty(R_b) - \tau_\infty(0) = \frac{2}{3} \left( \frac{3^{3/2}}{2^{3/2}} - 1 \right) r_g \approx 0.558 r_g \quad (71)$$

Рассмотрим теперь зависимость от  $t$  основных переменных при больших  $t$ . Из асимптотики  $t$ :

$$t \approx -r_g \ln \left( \frac{y-1}{(y^{1/2}+1)^2} \right) \approx -r_g \ln \left( \frac{y-1}{4} \right), \quad (72)$$

получаем:

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right) + \frac{R_b}{Rr_g} r \approx 1 + 4e^{-t/r_g}, \quad (73)$$

$$r \approx \frac{3r_g R}{2R_b} \left( 1 - \frac{R^2}{3R_b^2} + \frac{8}{3} e^{-t/r_g} \right). \quad (74)$$

При подстановке этого в (61) затем находим связь моментов собственного времени внутри звезды  $\tau(t, R)$  с  $t$ :

$$\tau = \tau_0(R_b) + \frac{2R_b^{3/2}}{3r_g^{1/2}} - \frac{3^{1/2}r_g}{2^{1/2}} \left( 1 - \frac{R^2}{3R_b^2} + \frac{8}{3} e^{-t/r_g} \right)^{3/2}. \quad (75)$$

При  $t \rightarrow \infty$  это выражение переходит в (68).

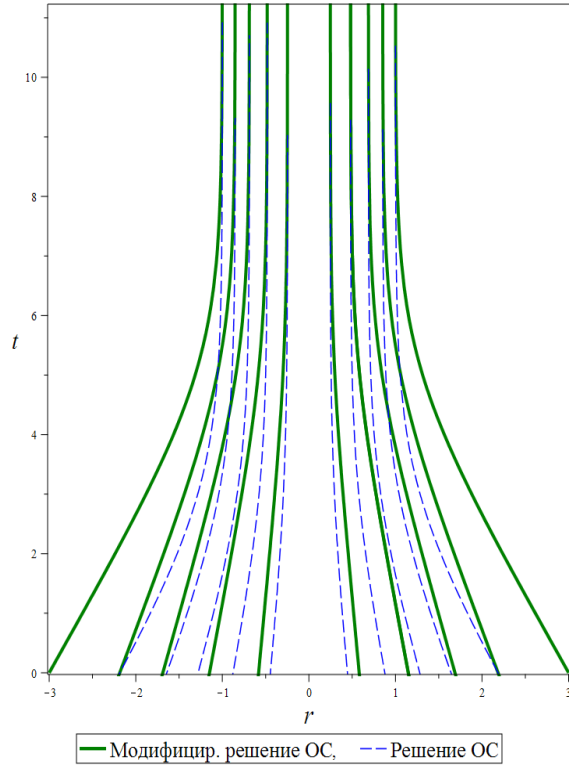


Рис. 3. Мировые линии частиц в слоях пылевого шара (в единицах  $r_g$ ). Поверхность падает с  $R_b=3$  при  $t=0$  и асимптотически приближается с  $r_g$  при  $t \rightarrow \infty$ . Другие слои застывают на разных расстояниях от центра согласно (67).

## 4.2. Внутренняя метрика и её асимптотика

В точном решении ОС компоненты метрики (37), с учётом (41), (46) и (44) и  $r = r(t, R)$ , приобретают вид:

$$e^{\lambda(t,R)} = (1 - r_{g,R} / r)^{-1}, \quad (76)$$

$$e^{\nu(t,R)} = \frac{[1 + (r_{g,R} / 2r)(1 - 3R_b^2 / R^2)]^2}{[1 + (r_{g,R} / 2r)(1 - R_b^2 / R^2)]^3} \frac{1}{1 - r_{g,R} / r}. \quad (77)$$

Линейный элемент, соответственно, имеет вид:

$$ds^2 = \frac{[1 + (r_{g,R} / 2r)(1 - 3R_b^2 / R^2)]^2}{[1 + (r_{g,R} / 2r)(1 - R_b^2 / R^2)]^3} \frac{dt^2}{1 - r_{g,R} / r} - \frac{dr^2}{1 - r_{g,R} / r} - r^2 d^2\Omega. \quad (78)$$

На поверхности  $R = R_b$  этот линейный элемент переходит в линейный элемент Шварцшильда (1). В центре звезды  $R = r = 0$  пространственная метрика тривиальна  $e^{\lambda(0,t)} = 1$ .

При  $t \gg r_g$  метрика (76) с учётом (74) имеет вид:

$$e^{\lambda(t,R)} \simeq \left[ 1 - \frac{R^2}{R_b^2} \left( 4e^{-t/r_g} + \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{R^2}{R_b^2} \right) \right) \right]^{-1} \quad (79)$$

или в более компактном виде:

$$e^{\lambda(t,R)} \simeq \frac{8e^{-t/r_g} + 3 - R^2 / R_b^2}{8e^{-t/r_g} + 3 - 3R^2 / R_b^2}. \quad (80)$$

В центре и на поверхности её значения равны:

$$e^{\lambda(t,0)} = 1, \quad e^{\lambda(t,R_b)} \simeq e^{t/r_g} / 4. \quad (81)$$

При  $t \rightarrow \infty$  метрика из (80) стремится к:

$$e^{\lambda(\infty,R)} = \frac{1 - R^2 / 3R_b^2}{1 - R^2 / R_b^2}. \quad (82)$$

Временная компонента метрики (37) при  $t \gg r_g$ , с учётом (46) и (74), имеет вид:

$$e^{\nu(t,R)} \simeq 16e^{\lambda} e^{-2t/r_g} \left( 4e^{-t/r_g} + \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{R^2}{R_b^2} \right) \right) \quad (83)$$

или в развёрнутом виде:

$$e^{\nu(t,R)} \simeq e^{-2t/r_g} \frac{[8e^{-t/r_g} + (3 - R^2 / R_b^2)]^2}{e^{-t/r_g} + 3(1 - R^2 / R_b^2) / 8}. \quad (84)$$

В центре и на поверхности её значения равны:

$$e^{\nu(t,0)} \simeq 24e^{-2t/r_g}, \quad e^{\nu(t,R_b)} \simeq 4e^{-t/r_g}. \quad (85)$$

При  $t \rightarrow \infty$  метрика из (84) стремится к:

$$e^{\nu(\infty,R)} = 24e^{-2t/r_g} \frac{(1 - R^2 / 3R_b^2)^2}{1 - R^2 / R_b^2}. \quad (86)$$

### Заключение

В статье изучен коллапс пылевой звезды и её структура в данный момент мирового времени в рамках метода ОС [5] и предложенной в статье её модификации.

Графики траекторий частиц пылевой звезды (Рис. 3) наглядно показывают внутреннюю структуру звезды на гиперповерхностях одновременности. При больших  $t$  мировая линия поверхности асимптотически приближается к гравитационному радиусу, а мировые линии во внутренних слоях становятся практически параллельными линиям центра и поверхности как в прежнем, так и в модифицированном решениях ОС.

Это показывает, что картина застывшей звезды относится не только к поверхности, но и к внутренним слоям, которые застывают вблизи своих асимптот.

Остальные два класса решений для эллиптических и гиперболических скоростей будут рассмотрены в последующих статьях.

### Благодарности

Я благодарю многочисленных коллег, с которыми в течение более десяти лет обсуждал те или иные аспекты данной задачи и которые своими критическими замечаниями стимулировали меня на более детальное и обстоятельное исследование разных аспектов задачи.

### Приложение

Решение уравнения (43):

$$\frac{y'}{\dot{y}} = -\frac{(r_{g,R}r)^{1/2}}{R} \quad (87)$$

ищем среди функций, имеющих вид

$$y(R, r) = A(R) + B(R, r), \quad (88)$$

где  $A$  не зависит от  $r$ , а производная от  $B$  по  $R$  равна нулю:

$$y' = A' + B' + \frac{\partial B}{\partial r} r' = A'. \quad (89)$$

Это даёт

$$B' = -\frac{\partial B}{\partial r} r', \quad \dot{y} = \frac{\partial B}{\partial r} \dot{r}. \quad (90)$$

Условие диагональности (43) тогда принимает вид

$$\frac{y'}{\dot{y}} = A' \left( \frac{\partial B}{\partial r} \dot{r} \right)^{-1} = \dot{r} r' \quad (91)$$

откуда следует:

$$A' = \dot{r}^2 r' \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{r_{g,R}}{R} \frac{\partial B}{\partial r}. \quad (92)$$

Так как левая часть не зависит от  $r$ , то и правая не должна содержать  $r$ , откуда следует, что  $B$  имеет вид  $B = q(R)r$  и из (90) получаем для  $q$ :

$$B' + \frac{\partial B}{\partial r} r' = q' r + q r' = 0. \quad (93)$$

С учётом (41) это уравнение принимает вид

$$\frac{q'}{q} = -\frac{r'}{r} = -\frac{1}{r} \frac{r}{R} = -\frac{1}{R}. \quad (94)$$

В его решении

$$\ln q = -\ln R + \ln w \quad (95)$$

константу  $w$  найдём из сшивания на поверхности

$$q(R_b) = \frac{w}{R_b} = \frac{1}{r_g}, \quad w = \frac{R_b}{r_g}, \quad (96)$$

что даёт

$$q = \frac{w}{R} = \frac{R_b}{Rr_g}, \quad B = qr = \frac{R_b}{Rr_g} r. \quad (97)$$

Подставив это в (92) получаем

$$A' = \frac{r_{g,R}}{R} q = \frac{R}{R_b^2}, \quad A = \frac{1}{2} \frac{R^2}{R_b^2} + p, \quad (98)$$

где константу  $p$  также найдём из условия сшивания:

$$A(R_b) = \frac{1}{2} + p = 0, \quad p = -\frac{1}{2}. \quad (99)$$

В итоге это даёт [5]:

$$A(R) = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right), \quad (100)$$

$$y(R, \tau) = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{R_b^2} - 1 \right) + \frac{R_b}{Rr_g} r. \quad (101)$$

Производные  $y$  при этом равны:

$$y' = \frac{R}{R_b^2}, \quad \dot{y} = \frac{R_b}{Rr_g} \dot{r} = -\frac{R^2}{R_b^2} \frac{1}{(r_{g,R}r)^{1/2}} \quad (102)$$

и условие диагональности (87) выполняется.

### Литература

1. Schwarzschild K. (1916) *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, p. 189.
2. Friedmann A.A. (1922) *Z. Phys.*, **10**, p. 376.
3. Lemaître (1933) *Ann. Soc. Sci. Bruxells, Ser. A*, 1933, **53**, p.51.
4. Tolman (1934) *Proc. Nat. Acad. Sci. US* **20**, 169.
5. Oppenheimer J.R., Snyder H. (1939) *Phys. Rev.* **56**, p. 455.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. т.1-3, 1977, М.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. 1988. М.
8. Вайнберг С. Гравитация и космология. 1975. М.
9. Окунь Л.Б. и др. (1999) *УФН*, **169**(10) 1141.