Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; EISSN 1991-3907
Том **8**, N 3, с. 71 – 79, в1, 13 ноября 2013
Электрон.: ТФАК: 4700-033 в1, 13 ноября 2013
DOI: 10.9751/TFAK.4700-033

Модели вселенной со строго сохраняющейся энергией материи

Захид Закир[1]

Аннотация

Показано, что ранее в фридмановских моделях требования нерелятивистской динамики шара, связанные с сохранением энергии материи, не были соблюдены, что затем привело к непоследовательности при формулировке и релятивистских моделей. Предложен путь к переформулировке моделей релятивистской космологии, когда они на малых расстояниях естественным образом переходят к нерелятивистской модели пылевого шара. В таким образом модифицированной модели ряд прежних проблем фридмановских моделей не возникает.

PACS: *04.20.Cv, 98.80.-k, 98.80.Jk 95.30.Sf, 97.60.Lf, 98.35.Jk, 98.54.-h, 98.80.-k, 04.60.-m*
Ключевые слова: космологические модели, красное смещение, гравитация

Содержание

Введение

Современная стандартная парадигма в области космология, излагаемая в обзорах и учебниках, основана на фридмановских моделях, дополненных нужным объёмом тёмной материи и тёмной энергии для согласования с наблюдениями [1,2]. При этом предполагается, что расхождения стандартных моделей с наблюдениями до введения не наблюдавшихся компонентов энергии не связаны с несовершенством теоретической основы принятой парадигмы, а вызваны лишь с недостаточной информацией о составе материи и плотности энергии в реальной вселенной.

В противоположность этому направлению, основанному на уверенности в основах действующей парадигмы, развиваются и другие подходы на базе общей теории относительности (ОТО), где некоторые предположения действующей парадигмы подвергаются сомнению. При более тщательном анализе действительно выявляются пробелы в обосновании и при первых же попытках их восполнения доля тёмных компонент в энергетическом балансе либо существенно снижается, либо даже сводится к нулю. В частности, в предыдущей статье [3] была начата последовательная формулировка релятивистской космологии на базе динамики однородного шара и были учтены изменения в фридмановской модели, следующие из требований релятивистской кинематики.

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики*, *Ташкент, Узбекистан*, zahidzakir@theor-phys.org

Другой аспект моделей вселенной связан с тем новым обстоятельством, что в локальной физике при решении уравнений поля предполагается исчезновение интегралов по поверхности «на бесконечности», где кривизна создаваемая компактными источниками должна исчезать. Эта привычная картина локальной физики использовалась и глобально в космологических моделях, в то время как космологический принцип предполагает однородность на любых расстояниях. В действительности в космологии константы интегрирования релятивистских моделей будет более корректно определять не вдали, а локально вблизи точки наблюдения путём «сшивания» с нерелятивистскими моделями на базе ньютоновской гравитации.

Это, в свою очередь, налагает ограничения на космологические модели, в частности, чтобы на малых расстояниях воспроизводилось нерелятивистское условие сохранения энергии для участвующей в расширении частицы.

В данной статье будет показано, что ранее в фридмановских моделях требования нерелятивистской динамики шара, связанные с сохранением энергии материи, не были соблюдены, что затем привело к непоследовательности при формулировке и самой релятивистской модели.

В статье будет предложен путь к переформулировке моделей релятивистской космологии, когда они на малых расстояниях естественным образом переходят к нерелятивистской модели пылевого шара. При этом ряд прежних проблем фридмановских моделей не возникает.

В разделах 1-2 приведены основные соотношения модели, в разделе 3 учтена релятивистская кинематика и в разделе 4 обсуждаются некоторые наблюдательные следствия.

1. Нерелятивистская динамика однородного пылевого шара в 3-сфере

Общерелятивистское уравнение эволюции однородной и изотропной вселенной, как известно, проще всего получить из ньютоновской модели эволюции однородного пылевого шара радиуса r, объёма $V(r)$ и массы $m=\rho\cdot V(r)$, где ρ - средняя плотность материи [1,2]. Для этого шар должен быть достаточно большим, чтобы быть однородным и расширяться, но и не слишком большим, чтобы скорость поверхности относительно центра шара оставалась нерелятивистской.

Рассмотрим сначала *изолированный* шар, расширяющийся в пустом пространстве и объект единичной массы сопутствующий поверхности шара. В ньютоновской теории полная энергия E этого объекта сохраняется и, с точностью до константы C определяющей начало отсчёта энергий, равна сумме кинетической и потенциальной энергий. Если сумма кинетической и потенциальной энергий частицы на поверхности отрицательна, то шар со временем остановится при максимальном радиусе r_m.

Уравнение эволюции для частицы на поверхности получим в *два этапа*:

а) сначала находим выражение для *полной энергии* частицы,

б) затем, используя *условие сохранения энергии*, исключаем константу C, выбрав одно из состояний, где мы точно знаем скорость.

Простейшим выбором является момент остановки шара при $r=r_m$, когда имеем:

$$E=\frac{1}{2}\dot{r}^2-\frac{Gm}{r}+C=-\frac{Gm}{r_m}+C, \tag{1}$$

где $\dot{r} = dr/dt$ - скорость относительно центра шара, G - гравитационная константа. Отсюда и следует *уравнение эволюции*:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{r_m}, \tag{2}$$

которое в более удобной записи имеет вид:

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2} = \frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_m}, \tag{3}$$

где $r_g = 2Gm/c^2$. Из трёх неизвестных констант системы в (1) - E, C и r_m - здесь исключены первые две и остался лишь r_m. В терминах плотностей получаем:

$$\dot{r}^2 = \frac{4\pi}{3} \cdot 2G \cdot (\rho r^2 - \rho_m r_m^2). \tag{4}$$

Шар с конечным максимальным радиусом расширения формально есть аналог закрытой модели релятивистской космологии, тогда как плоская модель соответствует $r_m \to \infty$. Поэтому достаточно рассмотреть закрытую модель, считая плоскую модель предельным случаем закрытой. В закрытой же вселенной $r(t) = a(t)\sin\chi$ и рассматриваемый нами шар есть сегмент 3-сферы, угловой объём которого равен $V_\chi = \pi(2\chi - \sin 2\chi)$. Перейдя к переменным 3-сферы можем рассмотреть эволюцию полусферы $\chi = \pi/2$ с наибольшим в каждый момент значением r равным $r = a$, при котором *уравнение эволюции* имеет вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} = \frac{a_{g,1/2}}{a} - \frac{a_{g,1/2}}{a_m}, \tag{5}$$

где $a_{g,1/2} = 2GM_{1/2}/c^2$ и $M_{1/2} = \pi^2 G\rho_0 a_0^3/c^2$ – масса материи в полусфере. В терминах плотностей уравнение эволюции полусферы принимает вид:

$$\dot{a}^2 = \pi^2 \cdot 2G \cdot (\rho a^2 - \rho_m a_m^2). \tag{6}$$

Шар же, расширяющийся в пространстве с однородной пылевой материей, уже *не изолирован* и материя вне шара создаёт внутри него не зависящий от координат, но зависящий от времени гравитационный потенциал, значение которого меняется в ходе расширения. В частности, на частицу на границе двух полусфер с $\Delta\chi = \pi/2$ гравитационное притяжение обеих полусфер действует одинаково и сила, ведущая к замедлению расширения, удваивается. В результате, правая часть (5) также удваивается и получаем окончательное уравнение эволюции для 3-сферы в целом:

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} = \frac{a_g}{a} - \frac{a_g}{a_m}. \tag{7}$$

В терминах плотностей получаем:

$$\dot{a}^2 = 2\pi^2 \cdot 2G \cdot (\rho a^2 - \rho_m a_m^2), \tag{8}$$

где $a_g = 2GM/c^2$ и $M = 2M_{1/2} = 2\pi^2 G\rho_0 a_0^3/c^2$ – масса материи в 3-сфере.

2. Общерелятивистское уравнение эволюции для 3-сферы

Стандартное уравнение Фридмана

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} = \frac{a_g}{a} - 1, \tag{9}$$

следующее из уравнений Эйнштейна, отличается от (7) заменой

$$\frac{a_g}{a_m} \to 1. \tag{10}$$

Ранее уравнение (9) формально получали из динамики нерелятивистского шара путём искусственной замены формулы (2), следующей из требования сохранения энергии, на физически бессодержательное уравнение [1,2]:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{Gm}{r} = -\frac{c^2}{2}. \tag{11}$$

В действительности уравнения (9) и (11) противоречивы и недопустимы не только с позиций ньютоновской теории, что можно было бы отнести на неточность последней, но и самой ОТО. В ОТО радиус расширяющегося шара должен быть *больше* его гравитационного радиуса $r_g < r \le r_m$, что даёт ограничение $a_g < a \le a_m$, тогда как (9) и (11) следуют из (7) и (2) при предположениях $a_m = a_g$ и $r_m = r_g$, что с физической точки зрения бессмысленно.

Это означает, что либо стандартная фридмановская метрика, либо тензор энергии-импульса, подставляемые в уравнения Эйнштейна для получения (9), содержат некие не реализующиеся в природе (нефизические) предположения. Исправления метрики будут рассмотрены в другой статье, а здесь же рассмотрим корректировку выражений для энергии-импульса, связанной с обеспечением сохранения энергии.

Как видим, уравнение (11) содержит некую константу, которая в общей форме присутствовала в (1) и оказалась точкой отсчёта полной энергии. Она выражается через значение потенциала при $r = r_m$, что затем позволяет превратить уравнение (1) в (2), удовлетворяющему условию сохранения энергии. В то же время, уравнение (11) нарушает условие сохранения энергии именно из-за некой константы. Таким образом, перед нами встаёт задача восстановить сохранение энергии и в этом случае, после чего уравнение (11), возможно, приобретёт физический смысл.

Для этого естественно применить тот же приём, что и при переходе от (1) к (2), т.е. не фиксировать константу энергии «руками» для подгонки под (9), а учесть тот факт, что в точке остановки $r = r_m$ имеем $\dot{r}^2(r_m) = 0$ и правая часть (11) должна равняться значению потенциала в этой точке. При этом мы приходим к уравнению (2) и тем самым полностью восстанавливаем сохранение энергии в системе. Вместо уравнения Фридмана (9) при этом, очевидно, приходим к уравнениям эволюции для 3-сферы (7) или (8).

Аналогичная процедура корректного определения константы энергии в уравнении эволюции шара применялась и ранее (см. [2], уравнение (1.2.4)), но только использовалось значение полной энергии не в момент остановки, а в настоящий момент $t = t_0$, так как скорость $\dot{r}_0$ можно определить из наблюдений. Это давало:

$$\frac{\dot{r}^2}{c^2}=\frac{r_g}{r}-\left(\frac{r_g}{r_0}-\frac{\dot{r}_0^2}{c^2}\right)=\frac{4\pi}{3}\cdot 2G\cdot\left[\rho r^2-\left(\rho_0-\rho_c\right)r_0^2\right], \tag{12}$$

где r_0 - современный радиус, а плотность материи $\rho(t)$ и критическая плотность ρ_c были определены как:

$$\rho(t)=\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{m}{r^3(t)},\quad \rho_c=\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{H_0^2}{2G}. \tag{13}$$

При этом в закрытой модели последняя скобка в (12) должна быть положительной, т.е. $\rho_0>\rho_c$. Наблюдаемое же значение ρ_0 оказывалось более чем на порядок меньше ρ_c, что затем рассматривалось как один из главных аргументов против закрытой модели.

Несмотря на исправление одной неточности, тем не менее, этот анализ содержал и другие неточности и был непоследователен, так что требуются дальнейшие уточнения и исправления, что затем изменит и выводы, в том числе и последний.

Во-первых, в закрытой модели в момент остановки $t=t_m$, когда $\dot{r}_m^2=0$, (12) переходит в

$$\frac{r_g}{r_0}-\frac{\dot{r}_0^2}{c^2}=\frac{r_g}{r_m}, \tag{14}$$

что после обратной подстановки в (12) даёт (3) со всеми последствиями, рассмотренными в разделе 1. Таким образом, уравнение эволюции шара (12) ведёт не к стандартной фридмановской модели с (9), а к модели на базе (7), отличной от стандартной.

Во-вторых, если от (12) перейти к 3-сфере в целом, то вместо (13) необходимо ввести уже другие определения плотностей:

$$\tilde{\rho}(t)=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{M}{a^3(t)},\quad \tilde{\rho}_c=\frac{1}{2\pi^2}\cdot\frac{H_0^2}{2G}=\frac{2}{3\pi}\rho_c. \tag{15}$$

так что уточнённая форма уравнение эволюции (12) для 3-сферы будет теперь иметь вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2}=2\pi^2\cdot 2G\cdot\left[\tilde{\rho}a^2-\left(\tilde{\rho}_0-\tilde{\rho}_c\right)a_0^2\right]. \tag{16}$$

Поскольку уточнённая критическая плотность почти в пять раз меньше прежней $\tilde{\rho}_c\simeq\rho_c/4.71$, тогда как в полной плотности материи $\tilde{\rho}_0=\rho_{0,\mathrm{b}}+\rho_{0,\mathrm{d}}$ наблюдаемая плотность энергии барионов $\rho_{0,\mathrm{b}}$ остаётся прежней, то для справедливости закрытой модели плотность тёмной материи $\rho_{0,\mathrm{d}}$ должна быть больше $\rho_{0,\mathrm{b}}$ всего в несколько раз, что вполне приемлемо и соответствует наблюдательным ограничениям.

3. Релятивистская динамика шара

Для начала будем пользоваться точным решением Шварцшильда для гравитационого поля на поверхности шара массы m. При этом мировое время $\tilde{t}$ есть мировое время в системе покоя центра шара. Это время совпадёт с собственным временем на поверхности при расширении до очень большого радиуса, что в принципе возможно при $r_m \to \infty$.

Для энергии объекта единичной массы, сопутствующего поверхности шара, тогда имеем выражение (в этом разделе положим $c = 1$):

$$\frac{\sqrt{1 - r_g / r}}{\sqrt{1 - v^2}} = \sqrt{1 - r_g / r_m}, \qquad v(r) = \frac{\dot{r}}{\sqrt{1 - r_g / r}}. \tag{17}$$

Введя обозначение $\eta(r_g, r_m) = 1/(1 - r_g / r_m)$, перепишем это в виде:

$$\dot{r}^2 = \frac{r_g}{r}\left(1 - \frac{r}{r_m}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\eta(r_g, r_m). \tag{18}$$

Максимальный радиус можно определить из данных для определённого времени:

$$r_m = r_g \cdot \left(\frac{r_g}{r_0} - v_0^2\right)^{-1} (1 - v_0^2). \tag{19}$$

Подставив $r(\tilde{t}) = a(\tilde{t}) \sin\chi$ и рассматривая полусферу $\chi = \pi / 2$, когда $r(\tilde{t}) = a(\tilde{t})$, $m = M / 2$ и $V_{\chi=\pi/2} = \pi^2$, приходим к релятивистскому уравнению эволюции:

$$\frac{da^2}{d\tilde{t}^2} = \frac{a_g}{a}\left(1 - \frac{a}{a_m}\right)\left(1 - \frac{a_g}{a}\right)\eta(a_g, a_m). \tag{20}$$

В ранние периоды скорость расширения вселенной была большой и для объектов с большим z необходим учёт релятивистских эффектов. Поэтому собственное время центра шара $\tilde{t}$ выразим через глобальное мировое время центра 3-сферы t (далее $\dot{a} \equiv da / dt$):

$$d\tilde{t} = dt\sqrt{1 - \dot{a}^2}. \tag{21}$$

Линейный элемент на 3-сфере тогда имеет вид [3]:

$$ds^2 = dt^2 - da^2 - a^2(t) \cdot d\Omega^2_{(3)} = dt^2(1 - \dot{a}^2) - a^2(t) \cdot d\Omega^2_{(3)}. \tag{22}$$

Подставив (21) в (5), приходим к уравнению эволюции для вселенной с учётом релятивистских эффектов радиальной скорости расширения 3-сферы:

$$\frac{\dot{a}^2}{1 - \dot{a}^2} = \frac{a_g}{a} - \frac{a_g}{a_m}. \tag{23}$$

Выражение для релятивистского фактора тогда имеет вид

$$\sqrt{1 - \dot{a}^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2 + a_g / a}}. \tag{24}$$

где $\eta \equiv \sqrt{a_g / a_m}$. Из (24) следует, что в эпохи с $a \gg a_g$ релятивистские эффекты становятся несущественными.

4. Наблюдаемые следствия нового уравнения эволюции

Итак, у нас есть новое уравнение эволюции 3-сферы (7), следующее из уравнений Эйнштейна при их согласовании на малых расстояниях с нерелятивистской динамикой шара с корректно определённой полной энергией. Оно отличается от уравнения Фридмана (9) последним членом и ведёт к новому классу космологических моделей с наблюдаемыми следствиями.

а) *Плоская модель.*

Сначала рассмотрим стандартный предельный случай, когда $a_m \gg a$ и в (7) можно пренебречь последним член, полагая $\eta \to 0$:

$$\frac{\dot{a}^2}{c^2} \simeq \frac{a_g}{a}. \tag{25}$$

Из уравнения для траектории радиально-распространяющегося света:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \cdot d\chi^2 = 0 \tag{26}$$

далее следует:

$$\chi_z = c\int_{a_z}^{a_0} \frac{da}{a} \cdot \frac{dt}{da} = \frac{1}{\sqrt{a_g}} \int_{a_z}^{a_0} \frac{da}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\eta_0}}\left(1 - \sqrt{a_z / a_0}\right). \tag{27}$$

где $\eta_0 = a_g / a_0$ Красное смещение z длин волн при приёме λ_r по сравнению с длиной при излучении λ_e и связь с масштабным фактором в нерелятивистском случае определены как:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = 1 + z, \quad \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_z}, \tag{28}$$

что после подстановки в (27) даёт

$$\chi_z = \frac{2}{\sqrt{\eta_0}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right). \tag{29}$$

Видимая и абсолютная светимости *l, L* источников в отсутствие расширения были бы связаны с фотометрическим расстоянием $d_p \simeq a\chi$ как $l = L / 4\pi d_p^2$. Через видимую и абсолютную звёздные величины *m, M* они выражаются как $l = 10^{-m/2.5} \cdot 2.52 \cdot 10^{-5}$ эрг/см²сек и $L = 10^{-M/2.5} \cdot 3.02 \cdot 10^{35}$ эрг/сек. Расширение ведёт к уменьшению энергии и частоты прибытия фотонов на величину $1+z$. Стандартное выражение для видимой светимости тогда имеет вид:

$$l_F = \frac{L}{4\pi d_{p,0}^2} \cdot \frac{1}{(1+z)^2}. \tag{30}$$

Фотометрическое расстояние $d_{p,0}$, таким образом, равно:

$$d_{p,0} = a_0 \cdot (1+z) = 10^{-5+(m-M)/5} Mnc, \tag{31}$$

откуда для модуля расстояния $\mu \equiv m - M = 5\lg(d_{p,0}) + 25$ следует выражение:

$$\mu = 5\lg\left[a_0(1+z) \cdot \chi_z\right] + 25 = 5\lg\left[2\left(1 + z - \sqrt{1+z}\right)\right] + A, \tag{32}$$

где $A \equiv 5 \cdot \lg(c / H_0) + 25$, $H_0 = \dot{a}_0 / a_0$ и $c / H_0 = a_0 / \sqrt{\eta_0}$.

б) *Модель закрытой «мини-вселенной».*

Рассмотрим теперь случай «мини-вселенной», когда радиус мал и большинство из наблюдаемых источников есть повторные изображения. В данном случае скорость расширения мала, так как $\dot{a}_0 \sim \eta c \ll c$ и эффектами релятивистской кинематики, рассмотренными в [3], можно пренебречь для всех наблюдаемых объектов. Перейдём к изучению наблюдаемых следствий этой новой версии релятивистской космологии.

Введя обозначение $b = a_0 / a_m$, из (7) имеем:

$$a_0 = \frac{c}{H_0}\eta\sqrt{b^{-1}-1}, \quad a_m = \frac{a_0}{b}. \tag{33}$$

Первый вывод состоит в том, что так как $a_0 \sim \eta \cdot c / H_0$ и $\eta < 10^{-2}$, то современный радиус вселенной a_0 оказывается по меньшей мере на два порядка меньше «хаббловского радиуса» c / H_0. Вселенная в таком случае оказывается миниатюрной и мы имеем дело с моделью *мини-вселенной*. Реальные объекты тогда находятся в радиусе около 100 Мпс, а все остальные наблюдаемые объекты должны быть тогда кратными изображениями, появившимися при кругосветных обходах луча света до регистрации. Однородность и изотропность вселенной вне основной сферы тогда объясняются естественным образом.

Из (7) и (26) далее следуют:

$$\chi_z = c\int_{a_z}^{a_0}\frac{da}{a}\cdot\frac{dt}{da} = \frac{1}{\eta}\int_{a_z}^{a_0}\frac{da}{\sqrt{a(a_m-a)}} = \frac{1}{\eta}\left[\arcsin\left(1-\frac{2a_z}{a_m}\right)-\arcsin\left(1-\frac{2a_0}{a_m}\right)\right]. \tag{34}$$

$$\sin\chi_z = \sin\left\{\frac{1}{\eta}\arcsin\left[2\sqrt{b(1-b)}\,\frac{a_z}{a_0}\left[\frac{a_0}{a_z}-1-(1-2b)\left(\sqrt{\frac{a_0/a_z-b}{1-b}}-1\right)\right]\right]\right\}. \tag{35}$$

Это даёт

$$\sin\chi_z = \sin\left\{\frac{1}{\eta}\arcsin\left[\frac{2\sqrt{b(1-b)}}{1+z}\left[z-(1-2b)\left(\sqrt{1+\frac{z}{1-b}}-1\right)\right]\right]\right\}. \tag{36}$$

где $1/\eta$ большое число, но тем не менее в пределе $z \to 0$ имеем:

$$a_0 \sin\chi_z \to c / H_0. \tag{37}$$

Фотометрическое расстояние теперь имеет вид $d_p = a\sin\chi$ и для видимой светимости имеем выражение:

$$l_F = \frac{L}{4\pi a_0^2 \sin^2\chi_z}\cdot\frac{1}{(1+z)^2}. \tag{38}$$

Отсюда для фотометрического расстояния $d_{p,0}$ получаем:

$$d_{p,0} = a_0\left|\sin\chi\right|\cdot(1+z) = 10^{-5+(m-M)/5}\,Мпс, \tag{39}$$

что для модуля расстояния даёт выражение:

$$\mu = 5\lg\left[a_0(1+z)\cdot\left|\sin\chi\right|\right] + 25 = \\ = 5\lg\left[\eta\sqrt{b^{-1}-1}\cdot(1+z)\left|\sin\chi\right|\right] + A, \tag{40}$$

Подстановка (36) в (40), даёт новое соотношение «модуль расстояния – красное смещение» для модели «мини-вселенной».

На первый взгляд сравнение с наблюдениями должен дать отрицательный результат, так как такие сильные эффекты периодичности в модуле расстояния не фиксировались. Однако, если модель соответствует реальности, то эти эффекты видимо как-то сглаживаются и имеет место плавная периодичность вдоль средней линии. Тогда приобретает смысл изучение тонкой структуры зависимости $\mu(z)$, которая может содержать такую периодическую компоненту на фоне гладкой.

Более детальное сравнение с наблюдениями и обсуждение рассмотренных моделей будет проведено в последующих публикациях.

Литература

1. Вайнберг (2013) Космология. М.
2. Зельдович Я.Б., Новиков И.Б. (1975) Строение и эволюция вселенной. М.
3. Закир З. (2013) *Теор. физ., астрофиз. и космол.*, **8**, 2, с.39; doi: 10.9751/TFAK.4518-031