

Модель закрытой Вселенной с релятивистскими эффектами 4-измерения

Захид Закир¹

Аннотация

В общей теории относительности (ОТО) закрытая вселенная как 3-сфера существует только при погружении в реальное 4-пространство, а гиперповерхность одновременности вселенной сферически-симметрична только в системе покоя центра 3-сферы. Поэтому эволюция вселенной описана в мировом времени t этой системы отсчёта, где уравнения Эйнштейна с плотностью материи (и без темной энергии) имеют простые точные решения. Радиальная скорость 3-сферы ведёт к релятивистскому замедлению собственных времён, что ведёт к новому закону расширения и релятивистскому красному смещению. Используя лишь нынешние начальные данные - современный радиус a и скорость расширения, - остальные свойства и динамика эволюции вселенной предсказываются и находятся в согласии с данными. В результате, из стандартной ОТО и наблюдений следуют, что вселенная закрытая, замедляется и что 4-измерение, возможно, реально существует. Эволюция вселенной описана для всех эпох, включая и раннюю вселенную с учётом давления. Нуклеосинтез и рекомбинация происходят при существенно низких концентрациях, но за намного более длительное время. Показано, что модель лишена тех космологических проблем, которые были в прежних подходах.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.-k, 98.80.Jk 95.30.Sf, 97.60.Lf, 98.35.Jk, 98.54.-h, 98.80.-k, 04.60.-m

Ключевые слова: космологические модели, красное смещение, сверхновые, Большой Взрыв, нуклеосинтез, рекомбинация, микроволновый фон, космологические проблемы

Содержание

Введение	40
1. Релятивистская космология и закрытая модель	40
1.1. Этапы развития закрытой модели	40
1.2. Закрытая модель с релятивистским замедлением времени	42
1.3. Релятивистское красное смещение и параметры вселенной	44
2. Ранняя вселенная с ненулевым давлением	46
2.1. Закрытая вселенная в 4-пространстве при ненулевом давлении	46
2.2. Эпоха доминирования излучения	48
2.3. Эпоха нуклеосинтеза	50
3. Ранняя вселенная при нулевом давлении	52
3.1. Расширение и сжатие тонкой пылевой 3-сферы в 4-пространстве	52
3.2. Эпоха рекомбинации	53
4. Жизненный цикл вселенной и космологические проблемы	54
4.1. Жизненный цикл вселенной	54
4.2. Отсутствие в модели прежних космологических проблем	56
Заключение	61
Приложение 1. Теорема существования для 3-сферы	61
Приложение 2. Уравнения Эйнштейна для закрытой модели в терминах мирового времени	62
Литература	64

¹ *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент, Узбекистан, zahidzakir@theor-phys.org*

Введение

Из трёх возможных моделей релятивистской космологии для однородной и изотропной вселенной - закрытой, плоской и открытой – закрытая модель наиболее предпочтительна с теоретической точки зрения, так как только в ней 3-объём и масса вселенной конечны и из неё естественным образом следует факт Большого Взрыва без дополнительных гипотез и граничных условий в 3-пространстве [1-7]. Но прежние формулировки этой модели не были последовательными и поэтому расходились с наблюдениями.

В предыдущей статье [8] была сформулирована модель закрытой вселенной с релятивистским красным смещением в приближении пылевого вещества как простейшая состоятельная модель релятивистской космологии. Было показано, что модель лишена свободных параметров и, используя только начальные данные вселенной – нынешний радиус a_0 и скорость расширения \dot{a}_0 , хорошо описывает наблюдательные данные по красным смещениям и плотности материи, предсказывает другие характеристики и ход эволюции вселенной.

В данной статье модель формулируется для всех эпох, включая и раннюю вселенную. Показывается, что при учёте давления со стандартными уравнениями состояния модель остаётся простой и точно решаемой. Это позволяет изучать эволюцию вселенной практически во все эпохи на основе достаточно простых соотношений.

В частности, обсуждаются изменения физических условий и параметров нуклеосинтеза и рекомбинации. Показывается, что модель позволяет описать наблюдения без новых гипотез и произвольных параметров. Аналогичная модель, но без учёта релятивистского красного смещения и на базе тёмной энергии изучалась в [9].

В первой части статьи закрытая модель в 4-пространстве формулируется в простейшем случае нулевого давления и без тёмной энергии. Другие эпохи, включая эпохи рекомбинации, нуклеосинтеза и более ранняя вселенная с ненулевым давлением, а также решения космологических проблем рассмотрены в 2-4 частях.

1. Релятивистская космология и закрытая модель

1.1. Этапы развития закрытой модели

После создания общей теории относительности (ОТО) первое же её применение к космологии Эйнштейном [1] показало принципиально новую возможность обойтись без граничных условий в 3-пространстве, сняв тем самым ряд противоречий - *пространство вселенной могло быть 3-сферой конечного объёма, содержащей конечную массу (энергию)*. Он использовал линейный элемент в 3-пространстве, который в сферических координатах имел вид:

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2 d^2\Omega_3, \quad (1)$$

где τ - собственное время и $d^2\Omega_3 = d\chi^2 + \sin^2\chi \cdot d^2\Omega_2$ - угловое расстояние на 3-сфере. Эйнштейн исходил из двух гипотез - о 3-мерности пространства вселенной и статической эволюции, но радиус 3-сферы $a(\tau)$ менялся со временем и поэтому он добавил гипотезу о стабилизирующей космологической константе $\Lambda \neq 0$.

Доказательство отсутствия стабильных статических решений и развитие моделей нестатического мира [2] исключило вторую гипотезу, что сделало не обязательной третью гипотезу. Уравнения эволюции при этом приобрели вид:

$$\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \frac{a_m}{a} - 1 + \Lambda a^2. \quad (2)$$

Открытие красного смещения z_s в спектрах галактик, определяемого как относительное изменение длины волны $z_s \equiv \Delta\lambda / \lambda_e$, т.е. $\lambda_r / \lambda_e \equiv 1 + z_s$, показало расширение вселенной [3,4]. Спектроскопическое красное смещение z_s при этом приравнивалось относительному изменению радиуса $z \equiv \Delta a / a_z$, т.е. $z_s = z$. Здесь

$$a_0 / a_z \equiv 1 + z. \quad (3)$$

Из факта расширения следовал вывод, что начальное состояние вселенной было очень плотным, а потому и очень горячим, что и привело к нынешнему расширению [6]. Эта картина затем составила основу теории Большого Взрыва [7], объяснившего распространённость лёгких элементов и предсказавшего реликтовой фон.

Формулировка моделей на базе (1)-(3), вывод (2) из динамики шара в однородном мире [5], наблюдательные уточнения параметров соотношения «светимость-красное смещение», плотности материи и открытие реликтового фона завершили начальный этап формирования релятивистской космологии.

Основными задачами второго этапа затем стали: 1) уточнение расстояний и светимостей для удалённых источников; 2) определение кривизны и выбор космологической модели; 3) построение и проверка сценариев ранней и будущей вселенной; 4) выявление и проверка сценариев структурообразования. Далее будет рассмотрено развитие теории в первых трёх направлениях.

В последнее время сверхновые типа 1a (SN 1a) как «стандартные свечи» показали, что объекты с ростом z становятся тусклее [10], чем следует из (1)-(3). Это пытались объяснить моделями с $\Lambda \neq 0$ и плоской метрикой, но по-прежнему основываясь на (1)-(3), предполагая их корректность в рамках стандартной ОТО.

Но, уравнение эволюции (2) ведёт к внутреннему противоречию в теории, так как следует из нерелятивистской динамики шара [5], где не учтена релятивистская кинематика, существенно меняющая уравнение эволюции при большом радиусе. Распространение нерелятивистской динамики шара на всю вселенную, очевидно, некорректно и свидетельствует о том, что (1)-(3) должны быть как-то изменены.

Другое внутреннее противоречие в прежних закрытых моделях возникала из факта [11], что существование 3-сферы невозможно без погружения хотя бы в 4-пространство (см. Приложение 1). Поэтому построение закрытых моделей в 3-пространстве и «сравнение» их с наблюдениями также изначально были некорректными.

Попытки модифицировать закрытую модель с учётом релятивистского замедления времени в терминах мирового времени t системы покоя центра 3-сферы в реальном 4-пространстве предпринимались многими авторами. В простейшей кинематической формулировке [9] собственное время было введено как:

$$d\tau^2 = dt^2(1 - \dot{a}^2). \quad (4)$$

Линейный элемент (1) тогда переходит в

$$ds^2 = dt^2(1 - \dot{a}^2) - a^2(t)d^2\Omega_3, \quad (5)$$

а уравнение эволюции (2) принимает вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{1 - \dot{a}^2} = \frac{a_m}{a} - 1 + \Lambda a^2. \quad (6)$$

Но, изменив (1) и (2), в [9] было сохранено (3) и, для описания наблюдений, была введена тёмная энергия $\Lambda \neq 0$, определившая динамику и параметры вселенной.

Определение же (3) впервые изменилось только недавно [12], когда было найдено, что в реальной вселенной ОТО ведёт к нетривиальной связи z_s с a из-за консервации z_s в каждом из пройденных скоплений галактик. В результате спектроскопическое z_s и космологическое z оказались не эквивалентными $z_s < z$, так что всегда нужно «подправлять» наблюдаемые z_s .

Вторая, более серьёзная ревизия (3) потребовалась из-за обнаружения релятивистского красного смещения [8], следующего из (4) при больших скоростях расширения поверхности шара в однородном мире. Из (5)-(6) (при $\Lambda = 0$) следует $1 - \dot{a}^2 = a / a_m$ и вдобавок к линейному растяжению длины волны, а значит и периода в мировом времени $\delta t_r / \delta t_e = a_0 / a_z$, имеет место и квадратичный Доплер-эффект:

$$\frac{\delta \tau_r}{\delta \tau_e} = \frac{\delta t_r \sqrt{1 - \dot{a}_0^2}}{\delta t_e \sqrt{1 - \dot{a}_z^2}} = \frac{a_0^{3/2}}{a_z^{3/2}} = 1 + z. \quad (7)$$

Это вместе с (4)-(6) ведёт к замене (3) на (7) или $a_0 / a_z = (1 + z)^{2/3}$ и ведёт к согласию теории с наблюдениями. Ниже эта версия закрытой модели с релятивистским красным смещением (и без тёмной энергии) изучена систематически.

1.2. Закрытая модель с релятивистским замедлением времени

Эволюцию закрытой вселенной рассмотрим в системе покоя центра 3-сферы K_m , где гиперповерхность одновременности вселенной есть 3-сфера. При этом учитываем лишь взаимное притяжения вещества внутри 3-сферы и релятивистские эффекты из-за скорости расширения.

В этом случае координатное время t системы K_m - это космологическое мировое время, протекающее равномерно за время эволюции вселенной. Имеется сеть гиперповерхностей одновременности $t = const$, на которых и строятся 3-сферические протяжённые физические системы координат. Темп хода стандартных часов, в каждый момент одинаковый в любой точке 3-сферы, в более ранние моменты расширения замедлен по отношению к темпу в более поздние времена. Темп хода же координатных часов, измеряющих время t и идущих *быстрее* сопутствующих материи стандартных часов, в любое время расширения одинаков и все такие часы всегда остаются взаимно синхронными.

Для линейного элемента на 3-сфере в глобальных координатах системы K_m получаем такое же выражение как для 2-сферы в 3-пространстве, но с увеличением на один размерности углового линейного элемента $d^2\Omega_2 \rightarrow d^2\Omega_3$:

$$ds^2 = dt^2 - da^2 - a^2(t)d^2\Omega_3 = dt^2(1 - \dot{a}^2) - a^2(t)d^2\Omega_3. \quad (8)$$

Мировое время t в каждой точке измеряется координатными часами, идущими быстрее стандартных с релятивистским коэффициентом $(1 - \dot{a}^2)^{1/2}$.

Такая запись выявляет важный факт - линейный элемент (8) в $D=1+4$ пространстве-времени эквивалентен линейному элементу в $D=1+3$ пространстве-времени с нетривиальной временной компонентой метрики:

$$ds^2 = e^{\nu(t)} dt^2 - a^2(t) d^2\Omega_3. \quad (9)$$

В результате, в принятом приближении оба представления (8) и (9) эквивалентны и появление временной компоненты метрики

$$g_{00}(t) = e^{\nu(t)} = 1 - \dot{a}^2(t) \quad (10)$$

связано с кинематическими эффектами - релятивистским замедлением времени при космологическом расширении, которое ведёт к релятивистскому эффекту Доплера.

Итак, для выражения скорости расширения $\dot{a}(t)$ через параметры модели достаточно решить уравнения Эйнштейна $G_\nu^\mu = \kappa_4 T_\nu^\mu$ для гиперсферы в $D=1+3$ пространстве-времени с метрикой (10) и плотности материи ρ (см. Приложение 2). Уравнения Эйнштейна (92)-(93) (при $p=0$) переходят в соотношения:

$$\frac{1}{1 - \dot{a}^2} = \frac{a_m}{a}, \quad \rho a^3 = const. \quad (11)$$

где максимальный радиус расширения a_m , определён условием $\dot{a} = 0$:

$$a_m \equiv \frac{1}{3} \kappa_4 \rho_0 a_0^3 = 2GM, \quad \kappa_4 = 12\pi^2 G. \quad (12)$$

Для скорости расширения и выражения метрики из (11) через a получаем:

$$e^{\nu/2} = \sqrt{1 - \dot{a}^2} = \sqrt{a / a_m}. \quad (13)$$

$$\dot{a} = \pm \sqrt{1 - a / a_m}, \quad a(t) = |t - t^2 / 4a_m|. \quad (14)$$

Мировое время от начала до максимального расширения есть $t_m = 2a_m$. Возраст вселенной в мировом времени равен:

$$t_0 = 2a_m (1 - \sqrt{1 - b}), \quad b \equiv a_0 / a_m. \quad (15)$$

Собственное время от начала пылевой стадии расширения равно:

$$\tau_1 = \int_0^{t_1} dt \sqrt{1 - \dot{a}^2} = - \int_0^{a_1} \frac{da \sqrt{a}}{\sqrt{a_m - a}} = a_m \arcsin \sqrt{\frac{a_1}{a_m}} - \sqrt{a_1(a_m - a_1)}, \quad (16)$$

и для собственного возраста пылевой стадии эволюции получаем выражение:

$$\tau_0 = a_m \left(\arcsin \sqrt{b} - \sqrt{b(1 - b)} \right), \quad (17)$$

Интервал собственного времени от начала (пылевого) расширения до остановки при $a(\tau_m) = a_m$, таким образом, равен $\tau_m = a_m \pi / 2$ и меньше интервала координатного времени до этого момента: $\tau_m < t_m$. В ранние периоды ($t \ll a_m$) расширение идёт по линейному закону $a(t) \sim t$ и по t расширение идёт быстрее, чем по τ с $a(\tau) \sim \tau^{2/3}$. Отметим, что эти выражения получены без учёта плотности энергии и давления излучения, тем не менее, они дают возраст вселенной довольно близкую к реальной, так как период, когда доминировало излучение на более чем два порядка меньше нынешнего возраста вселенной.

Из уравнения для луча найдём выражение для угла χ [8]:

$$\cos \frac{\chi_0}{2} = 1 - \frac{t_0}{2a_m}. \quad (18)$$

Фотоны, испущенные в начале расширения, к моменту максимального расширения ($t_m = 2a_m$) от одного полюса успевают дойти лишь до следующего полюса ($\chi = \pi$). Как показывают данные [8], сейчас $b \sim 0.2$, так что реликтовое излучение, которое наблюдается, было испущено от областей примерно $\chi \sim 50^\circ$, т.е. ближе экватора вселенной. Поэтому пока прямые эффекты периодичности не должны наблюдаться.

В системе K_m 4-скорость фотона при $d\theta = d\varphi = 0$ есть:

$$u_\mu = (1, \dot{a}, (1 - \dot{a}^2)^{1/2}, 0, 0). \quad (19)$$

т.е. пространственные компоненты 4-скорости отличны от нуля на плоскости (a, χ) , так что в системе K_m скорость перемещения фотона по периметру круга меньше скорости света и растёт по ходу расширения:

$$c_{(3)}(a) = \frac{a \delta\chi}{\delta t} = \sqrt{1 - \dot{a}^2} < 1. \quad (20)$$

Эта скорость $c_{(3)}(a)$ возрастает при приближении фотонов к наблюдателю в более поздние эпохи, так что фотоны от удалённых объектов «ускоряются» по мере приближения к нам. Этот эффект аналогичен восстановлению прежде замедленной скорости света при выходе фотонов из области сильного гравитационного поля.

1.3. Релятивистское красное смещение и параметры вселенной

Наблюдаемые следствия модели и параметры вселенной были рассмотрены в предыдущей статье [8] поэтому здесь перечислим лишь основные результаты. Новые эффекты связаны с геометрией 3-сферы, кинематикой с релятивистскими эффектами, а также сочетанием этих двух обстоятельств.

Новые оптические эффекты возникают из-за расширения 3-сферы в 4-пространстве с радиальной скоростью \dot{a} , ортогональной к направлению испускания излучения. Это ведёт к *поперечному Доплер-эффекту* (7), уменьшающей частоту с фактором $(1+z)^{1/3}$ и к *релятивистской абберации*, уменьшающей светимость с фактором $(1+z)^{2/3}$.

Элемент телесного угла $d\Omega_r = d(\cos \theta') \cdot d\varphi$, под которым виден источник в системе покоя приёмника, будет отличаться от того же угла $d\Omega_e = d(\cos \theta) \cdot d\varphi$ в системе покоя источника и видимая светимость l умножается на фактор:

$$\frac{d\Omega_e}{d\Omega_r} = \frac{1 - \dot{a}_z^2}{1 - \dot{a}_0^2} = \frac{a_z}{a_0} = \frac{1}{(1+z)^{2/3}}. \quad (21)$$

Определение l , содержащее также фактор $(1+z)^{-2}$ от энергии и частоты прибытия фотонов, теперь приобретает вид:

$$l = \frac{L}{4\pi d_{h,0}^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 \sin^2 \chi_z} \cdot \frac{1}{(1+z)^{8/3}}, \quad (22)$$

где L - абсолютная светимость, $d_{p,0}$ - фотометрическое расстояние. Отсюда:

$$d_{p,0} = a_0 \sin \chi \cdot (1+z)^{4/3} = 10^{-5+\mu/5} \text{ Мпс}, \quad (23)$$

$$\mu = 5 \lg \left[a_0 (1+z)^{4/3} \sin \chi \right] + 25. \quad (24)$$

Из уравнения для траектории луча следует:

$$\chi_z = \int_{a_z}^{a_0} \frac{da}{a} \cdot \frac{d\tau}{da} = \int_{a_z}^{a_0} \frac{da}{\sqrt{a(a_m - a)}} = \arcsin \left(1 - \frac{2a_z}{a_m} \right) - \arcsin \left(1 - \frac{2a_0}{a_m} \right). \quad (25)$$

Подставив (7) и (25) в (24), получаем новую формулу для модуля расстояния:

$$\mu = 5 \lg \left\{ 3(1-b)Z \left[Z - 1 - (1-2b) \left(\sqrt{(Z-b)/(1-b)} - 1 \right) \right] \right\} + A, \quad (26)$$

где $Z \equiv (1+z)^{2/3}$ и

$$A = 5 \lg(c / H_{obs}) + 25, \quad H_{obs} = \frac{3}{2} H_0 = \frac{3c}{2a_0} \frac{1}{\sqrt{b^{-1}-1}}. \quad (27)$$

Формула (26) хорошо согласуется с данными по красным смещениям для SN 1a [8] и заменяет формулу Маттига прежних моделей, не учитывающей релятивистского красного смещения (7). При малых z формула (26) переходит в:

$$\mu \approx 5 \lg(z + \gamma z^2) + A, \quad \gamma(b) = (4-5b) / 6(1-b). \quad (28)$$

Сравнение модели с наблюдениями в [8] (диаграмма $\mu - z$ для SN 1a) позволило оценить два основных параметра: b и H_{obs} . Без учёта эффектов консервации в скоплениях галактик они приблизительно равны: $h_0 = 0.698$, $b = 0.18 \pm 0.07$, а с минимальным учётом эффектов консервации (при $f_0 = 0.15$):

$$h_0 = 0.734, \quad b = 0.15 \pm 0.05. \quad (29)$$

Далее все оценки параметров вселенной будем производить, основываясь на (29).

Современный и максимальный радиусы вселенной находим из (27):

$$a_0 = \frac{3c}{2H_{obs}} \sqrt{b^{-1}-1}, \quad a_m = \frac{a_0}{b} \quad (30)$$

и при выборе (29) имеем $a_0 \approx 13$ Гпс, $a_m \sim 70$ Гпс.

Собственный возраст получаем из (17) и (29) равным $\tau_0 \approx 13$ млрд.лет (в мировом времени $t_0 \approx 47$ млрд.лет). Это вполне приемлемо, так как это есть не полный возраст, а то время, когда материя расширялась как пылевая. Собственный возраст же при максимальном расширении $\tau_m \approx 370$ млрд.лет ($t_m \approx 500$ млрд.лет).

Полная масса M и плотность материи ρ_0 определяются значением a_m (12):

$$M = \frac{a_m c^2}{2G} = 1.5 \cdot 10^{57} \varrho \approx 1.5 \cdot 10^{13} \bar{M}_{gal}. \quad (31)$$

$$\rho_0 = \frac{M}{2\pi^2 a_0^3} \approx 11,6 \cdot 10^{-31}. \quad (32)$$

Плотность тёмной материи определяется как разница между вычисленной ρ_0 и наблюдаемой плотностью барионов $\rho_b \approx 3.4 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ (30% от ρ_0) и при параметрах (29) предсказывается значение $\rho_{dm} \approx 8.2 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ или 70% от ρ_0 .

Изменение плотности числа источников с расстоянием как $\sin \chi_z$ (по сравнению с плоским случаем) можно выявить подсчётами источников в интервале 3-угла $\chi, \chi + \Delta\chi$. Так как модель даёт новую зависимость расстояния от z , то также имеет место и новая зависимость плотности числа источников от красного смещения.

Изменение видимых размеров и поверхностной яркости, как и некоторые другие стандартные геометрические эффекты 3-сферы, определяемые $\sin \chi_z$ и новыми формулами для расстояний, приведены в большинстве книг по космологии. Эти эффекты в той или иной степени наблюдаемы и будут проявляться как универсальные свойства удалённых объектов.

Изменения длины пути фотонов в расширяющейся 3-сфере по сравнению с плоским случаем ведёт и к новым поправкам на межгалактическое рассеяние и поглощение.

Следствия расположения источников при другом радиусе многочисленны и изменяет наблюдаемые характеристики источников с данным z - их расположение при большем значении радиуса a_z с коэффициентом $(1+z)^{1/3}$ (по сравнению с прежней моделью) должны учитываться при обработке результатов наблюдений.

Перенормировка гравитационной константы в замкнутом мире связано также с гравитационным самодействием объектов по «кругосветным» путям, аналогично упругой силе в замкнутой цепочке, и при расширении вселенной это самодействие ослабевает, а гравитационная константа изменяется. Гравитационное сопротивление к расширению замкнутой вселенной конечного радиуса в целом будет больше, чем локализованной совокупности объектов в плоском пространстве. Кругосветная компонента гравитационного притяжения велика в ранние эпохи, что ведёт к ряду поправок на параметры вселенной и скорость эволюции. Результат такого эффективного усиления гравитационного взаимодействия можно учесть как в физике частиц и конденсированных состояний - «перенормировкой» гравитационной константы G :

$$G_{eff} = \alpha \cdot G, \quad \alpha > 1. \quad (33)$$

Но, в правой части уравнений Эйнштейна такое эффективное увеличение гравитационной константы при данной плотности эквивалентно увеличению плотности материи при неизменной гравитационной константе:

$$G_{eff} \rho = (G\alpha)\rho = G(\alpha\rho) = G\rho_{eff}. \quad (34)$$

Эффективная тёмная материя может вводиться при втором способе учёта последнего эффекта, когда гравитационная константа оставляется неизменной, но вместо плотности материи ρ_m вводится более высокая плотность $\rho_{m,eff}$:

$$\rho_{m,eff} = \alpha \cdot \rho_m = \rho_m + \rho_d, \quad (35)$$

где ρ_d и есть плотность эффективной «тёмной материи».

2. Ранняя вселенная с ненулевым давлением

2.1. Закрытая вселенная в 4-пространстве при ненулевом давлении

В ранней вселенной при ненулевом давлении первое из уравнений Эйнштейна (92), хотя и остаётся таким же по виду как для пылевого вещества, тем не менее, в эпоху доминирования излучения закон расширения будет иным из-за второго уравнения (93).

Уравнение (93) может быть упрощено с учётом (92). Записав его как:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-\dot{a}^2} \right) = -\frac{1}{3} \kappa a \dot{a} (\rho + 3p), \quad (36)$$

и снова используя (92), преобразуем его к виду:

$$\frac{d}{dt} (\rho a^2) = -a \dot{a} (\rho + 3p). \quad (37)$$

Это даёт уравнение эволюции для плотности энергии и давления:

$$\frac{d\rho}{\rho + p} = -3 \frac{da}{a}. \quad (38)$$

Далее учтём, что плотность энергии есть сумма двух компонентов – плотностей энергии вещества ρ_m и излучения ρ_r :

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \quad p_r = \rho_r / 3. \quad (39)$$

Если воспользуемся ещё тем фактом, что давление вещества во все эпохи намного меньше давления излучения $p_m \ll p_r$ и им можно пренебречь, то модель снова упрощается и точно решается. Учитывая соотношения

$$\rho_r a^4 = \text{const.} \quad \frac{\rho_{r0}}{\rho_{m0}} = w_0 \sim 10^{-5}, \quad (40)$$

сумму плотности и давления в (38) можно представить в виде:

$$\rho + p = \frac{1}{3} \rho_{m0} a_0^3 \left(\frac{3}{a^3} + \frac{4w_0 a_0}{a^4} \right). \quad (41)$$

В результате, уравнение (38) переходит в:

$$d\rho = -\rho_{m0} a_0^3 \left(3 \frac{da}{a^4} + 4w_0 a_0 \frac{da}{a^5} \right), \quad (42)$$

решение которого есть

$$\rho = \rho_{m0} \frac{a_0^3}{a^3} \left(1 + w_0 \frac{a_0}{a} \right). \quad (43)$$

При большом радиусе $a \sim w_0 a_0 \sim 10^{-5} a_0$ это решение переходит в зависимость для пылевого вещества $\rho \rightarrow \rho_m \sim a^{-3}$, а при малом радиусе $a \ll w_0 a_0$ переходит в зависимость для радиации $\rho \rightarrow \rho_r \sim a^{-4}$.

Далее из первого уравнения Эйнштейна (92) получаем выражение для коэффициента замедления времени:

$$\sqrt{1-\dot{a}^2} = \frac{a}{a_m} \frac{1}{\sqrt{1+a/w_0 a_0}}, \quad (44)$$

где введено обозначение $a_m^2 = w_0 a_0 a_m$, а также для скорости расширения (сжатия):

$$\dot{a} = \pm \sqrt{1 - \frac{a}{a+w_0 a_0} \cdot \frac{a}{a_m}}. \quad (45)$$

Это даёт выражение для возраста в мировом времени при расширении:

$$\begin{aligned}
t &= \int \frac{da}{\sqrt{1 - a^2 / a_m (a + w_0 a_0)}} \approx \\
&\approx \int da \sqrt{1 + \frac{a^2}{a_m (a + a_0 w_0)}} \approx a + \frac{1}{2a_m} \int da \frac{a^2}{a + a_0 w_0}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Здесь в интеграле, который прямо не берётся, знаменатель разложен с учётом $a \ll w_0 a_0$ в ранние периоды, так что в этом приближении получаем:

$$t \approx a \left(1 - \frac{w_0 a_0}{2a_m} + \frac{a}{4a_m} \right) - \frac{w_0^2 a_0^2}{2a_m} \ln \left(1 + \frac{a}{w_0 a_0} \right). \tag{47}$$

Интервал собственного времени при расширении приобретает вид:

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - \dot{a}^2} = \int da \frac{a}{\sqrt{a(a_m - a) + a_{rm}^2}} + C', \tag{48}$$

Здесь интеграл вычисляется точно и для возраста в собственном времени получаем:

$$\tau = \frac{a_m}{2} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + 4bw_0}} - \arcsin \frac{1 - 2a/a_m}{\sqrt{1 + 4bw_0}} \right) + a_{rm} - \sqrt{a(a_m - a) + a_{rm}^2}. \tag{49}$$

В приближении $4bw_0 \ll 1$ эта формула упрощается:

$$\tau \approx a_m \arcsin \sqrt{\frac{a}{a_m}} + a_{rm} - \sqrt{a(a_m - a) + a_{rm}^2}. \tag{50}$$

Соотношение между интервалами собственного времени теперь равно:

$$\frac{\Delta \tau_0}{\Delta \tau} = \frac{\Delta t_0 \sqrt{1 - \dot{a}_0^2}}{\Delta t \sqrt{1 - \dot{a}^2}} = \frac{a_0^2 \sqrt{w_0 + a/a_0}}{a^2 \sqrt{1 + w_0}} \approx \frac{a_0^2}{a^2} \sqrt{w_0 + \frac{a}{a_0}} = 1 + z, \tag{51}$$

откуда следует формула для красного смещения в общем случае:

$$\frac{a_0^2}{a^2} \sqrt{w_0 + \frac{a}{a_0}} = 1 + z. \tag{52}$$

Итак, при одновременном учёте плотностей энергии вещества и излучения основные соотношения усложняются незначительно и модель точно решается. Формулы в общем виде фактически нужны только в небольшом отрезке времени эволюции вселенной, когда эти две плотности одного порядка.

2.2. Эпоха доминирования излучения

При переходе в эпоху доминирования излучения исходные уравнения модели вновь упрощаются настолько, что лучше все соотношения получить заново. В ранние эпохи с $a \ll w_0 a_0$ уравнения (11) и (38), следующие из уравнений Эйнштейна (92)-(93), переходят в уравнения:

$$\frac{1}{1 - \dot{a}^2} = \frac{a_{rm}^2}{a^2}, \tag{53}$$

$$\frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4 \frac{da}{a}. \tag{54}$$

Решение уравнения (54) есть (40) и для релятивистской плазмы с температурой T имеем соотношения:

$$\rho = \rho_{r0} \frac{a_{r0}^4}{a^4} = \sigma T^4, \quad T = \frac{a_{r0}}{a} T_{r0}. \quad (55)$$

Уравнение (53) сразу даёт выражения для коэффициента замедления времени и скорости расширения:

$$\sqrt{1-\dot{a}^2} = \frac{a}{a_m}, \quad \dot{a} = \pm \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_m^2}}. \quad (56)$$

Уравнение (56) в интегральной форме:

$$\int \frac{da}{\sqrt{1 - a^2/a_m^2}} = t + C, \quad (57)$$

имеет простой решение (с нулевой начальным значением):

$$a(t) = a_m \sin(t/a_m). \quad (58)$$

Собственное время в сопутствующей системе в период доминирования излучения равно:

$$\tau = \int_0^t dt \sqrt{1-\dot{a}^2} = \int_0^a \frac{da}{\sqrt{1 - a^2/a_m^2}} \frac{a}{a_m} = a_m \left(1 - \sqrt{1 - a^2/a_m^2}\right), \quad (59)$$

Таким образом, зависимости между τ , t и a имеют вид:

$$\tau = 2a_m \sin^2(t/2a_m), \quad (60)$$

$$a = a_m \sqrt{1 - (1 - \tau/a_m)^2} = \sqrt{\tau(2a_m - \tau)}. \quad (61)$$

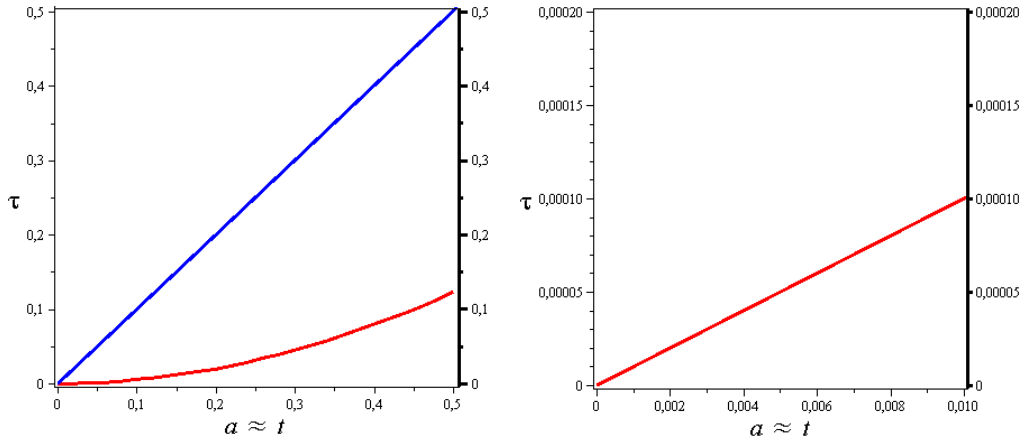


Рис.1. Зависимости $\tau(a)$ (красная линия) и $t(a)$ (синяя линия) в ранние эпохи.

В очень ранние периоды получаем приближённые формулы:

$$\tau \approx t \cdot \frac{t}{2a_m} \approx a \cdot \frac{a}{2a_m}, \quad (62)$$

и при этом связь τ с a такая же, как в фридмановской модели, где $\tau = a^2 / 2a_m$.

Присутствие коэффициента замедления $a/2a_m$ ведёт к существенному отставанию моментов собственного времени от моментов мирового времени. Как видно из Рис.1, это отставание может превышать 100 и более раз, в чём и

выражается режим расширения, аналогичный инфляционному, когда локальный темп хода физических процессов сильно замедлен по сравнению с мировым временем t , а ход расширения по t идёт равномерно и почти со скоростью света.

Соотношение между интервалами собственного времени равно

$$\frac{\Delta \tau_r}{\Delta \tau} = \frac{\Delta t_r}{\Delta t} \frac{\sqrt{1 - \dot{a}_r^2}}{\sqrt{1 - \dot{a}^2}} = \frac{a_r^2}{a^2} = 1 + z_r, \quad (63)$$

и поэтому:

$$a_r / a = \sqrt{1 + z_r}. \quad (64)$$

Итак, в ранний период вселенная расширяется практически с предельной скоростью, законы расширения просты и даются (58) и (62), а красные смещения растут с уменьшением a как в (64). Это означает, что все процессы, которые идут при определённых температурах, будут происходить при гораздо больших значениях радиуса, т.е. в более поздние периоды, чем в фридмановской модели. Это следствие модели естественным образом приводит к сценарию расширения, аналогичному инфляционному сценарию. Физическая причина при этом предельно проста и вызвана сильным релятивистским замедлением собственных времён в этот период. Радиальное расширение (рост радиуса 3-сферы) идёт почти со скоростью света, а азимутальные компоненты скорости света (вдоль 3-сферы) тогда очень малы и, следовательно, все процессы в 3-сфере сильно замедлены.

2.3. Эпоха нуклеосинтеза

Первой доступной изучению эпохой, следствия которой не только наблюдаемы, но и поддаются описанию и объяснению в рамках известной физики, является эпоха нуклеосинтеза. В данной модели физические условия при температурах, когда есть достаточное количество свободных нейтронов - концентрации и продолжительность периода - сильно отличаются от условий прежних моделей. Концентрации намного порядков меньше, но и времена становятся соответственно больше. В результате, теория нуклеосинтеза, хотя и не изменится в сугубо ядерно-физических аспектах, тем не менее, будет существенно иной в космологических аспектах. Поэтому далее рассмотрим только общие оценки по порядку величин.

Период между аннигиляцией электрон-позитронных пар при 1 МэВ или $1.2 \cdot 10^{10}$ К. и закалкой нейтронов при температуре 0.7 МэВ или $8.1 \cdot 10^9$ К. в данной модели соответствует возрасту вселенной в интервале $\tau \approx 1.22 \div 1.81$ лет по собственному времени ($t \approx 9.3 \div 12$ тыс. лет по мировому времени), когда радиусы составляли $a \approx 9.3 \div 12$ тыс. св. лет.

Концентрация нуклонов при этом была больше $n / n_0 = (1.0 \div 0.5) \times 10^{20}$ раз или, при нынешнем значении $n_0 \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3}$, была порядка $n \approx (2.0 \div 1.0) \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Плотность энергии излучения была в 10^{26} раз выше нынешней плотности и на один-два порядка превосходила плотность энергии материи. В этот период, который длился по собственному времени 0.59 лет или $\Delta \tau \approx 1.8 \times 10^8$ сек., столкновения нуклонов с энергичными фотонами и нейтрино были интенсивными и были достаточными, чтобы число свободных нейтронов уменьшалось медленно.

Прежние расчёты нуклеосинтеза в рамках фридмановской модели производились в предположении, что в период после закалки нейтронов

концентрация нуклонов была порядка $n/n_0 \approx 10^{25}$, т.е. $n_p \approx 10^{18}$ см⁻³, а продолжительность нуклеосинтеза была порядка времени распада нейтрона $\Delta\tau \approx 10^3$ сек. Оценка числа столкновений нуклонов Q за время $\Delta\tau$ при сечении $\sigma \sim 3 \cdot 10^{-26}$ см² и скорости $v \simeq 3 \cdot 10^8$ см/сек производилась по формуле:

$$Q \simeq \sigma v \cdot n_p \Delta\tau. \quad (65)$$

В фридмановских моделях при этих условиях $n_p \Delta\tau \sim 10^{21}$ см⁻³сек и для числа столкновений за время нуклеосинтеза было получено $Q_{Fr} \approx 10^3 \div 10^4$.

В данной версии закрытой модели сечения и скорости те же, но концентрация нуклонов примерно в 10^5 раз, а плотность излучения и нейтрино в 10^6 раз меньше, чем в прежних моделях. С другой стороны, продолжительность времени, когда были свободные нейтроны, была в 10^5 раз больше. При этом плотность излучения и нейтрино достаточно, чтобы обеспечит более медленное уменьшение числа нейтронов, а число столкновений нейтронов с протонами и далее с образовавшимся дейтерием будет примерно такое же, как в прежних подходах.

В результате в новой модели также $n_p \Delta\tau \sim 10^{21}$ см⁻³сек и формула (65) опять даст $Q_{new} \approx 10^3 \div 10^4$. Этого достаточно, чтобы основная часть нейтронов была захвачена в дейтерий, а далее дейтерий успевал захватывать свободные нейтроны, переходя в He³. Синтез идёт и в виде слияния ядер дейтерия.

В прежних моделях эпоха нуклеосинтеза длилась порядка времени распада нейтрона. При этом нынешнее большое количество дейтерия было проблемой, так как почти весь дейтерий, не перешедший в гелий, должен был распасться при нужных для этого высоких концентрациях нуклонов. От этого затем делались далеко идущие выводы о том, что закрытая модель недопустима из-за таких плотностей и т.д.

В новой модели нуклеосинтез связан с постепенным уменьшением концентрации свободных нейтронов и увеличением концентрации нераспавшихся ядер дейтерия и гелия в течение чуть больше полугода начиная со времени аннигиляции пар e^+e^- до достижения температуры закалки нейтронов. Малость концентраций нуклонов является важным преимуществом новой модели для естественного объяснения нынешней большой распространённости дейтерия (10^{-5}). Так как синтез дейтерия D и последующий синтез He³, He⁴ и других лёгких элементов в данной модели идёт намного дольше, чем ранее считалось, то, из-за малости концентрации нуклонов в 10^5 раз, медленнее распадаются и лёгкие ядра, в особенности, дейтерий и He³, которые поэтому накапливаются.

Отношение равновесных концентраций нейтронов и протонов в этот период определяется в основном температурой закалки и практически не зависит от деталей космологических моделей. Поэтому далее повторим стандартные выводы для того, чтобы показать простоту физической картины. При $T_n = 0.7$ МэВ, с учётом $\Delta m = m_n - m_p = 1.3$ МэВ, отношение равновесных концентраций равно:

$$n_n / n_p = \exp(-\Delta m / T_n) \simeq 1 / 6.4 \quad (66)$$

В результате, в период нуклеосинтеза на каждую пару нейтронов, образующих в дальнейшем He⁴, приходится в среднем $2 \times 6.4 \approx 13$ протонов, два из которых

войдут в состав ядра гелия. Тогда на каждое ядро He^4 приходится около 11 свободных протонов. Это затем даёт для относительной распространённости водорода и гелия по концентрациям и по массам:

$$\frac{n_{\text{He}^4}}{n_{\text{H}^1} + n_{\text{He}^4}} \simeq \frac{1}{12} \simeq 8\%,$$

$$\frac{M_{\text{He}^4}}{M_{\text{H}^1} + M_{\text{He}^4}} \simeq \frac{4m_p}{11m_p + 4m_p} \simeq \frac{4}{15} \simeq 26\% .$$
(67)

Сравнение с данными наблюдений 8% и 24% соответственно показывает, что для оценочного расчёта согласие хорошее.

Как известно, хотя отдельные аспекты нуклеосинтеза очень чувствительны к кинетике различных процессов, конечные соотношения концентраций достаточно универсальны, так как зависят в основном от температур и ядерно-физических аспектов. Поэтому, как видно из приведённых оценок, синтез лёгких элементов и при указанных сильно изменившихся концентрациях и временах позволяет объяснить их нынешнюю распространённость. Результаты более детальных расчётов нуклеосинтеза в модели будут приведены в последующих публикациях.

3. Ранняя вселенная при нулевом давлении

3.1. Расширение и сжатие тонкой пылевой 3-сферы в 4-пространстве

В модели вселенной как расширяющейся 3-сферы в 4-пространстве, в эпоху доминирования пылевого вещества уравнения эволюции в системе покоя центра 3-сферы принимают чрезвычайно простой вид (14). Как видим, во-первых, в ранние периоды радиус растёт по мировому времени практически линейно: $a \simeq t$, $t \ll a_m$ и, во-вторых, при данном значении z радиус $a_z \sim (1+z)^{-2/3}$ больше в $(1+z)^{1/3}$ раз, чем в прежних моделях, где связь имела вид $a_z \sim (1+z)^{-1}$.

Собственное время (17) в ранние периоды переходит в выражение:

$$\tau \simeq a \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\frac{a}{a_m}} \left(1 + \frac{3a}{10a_m} \right) + O(a^3).$$
(68)

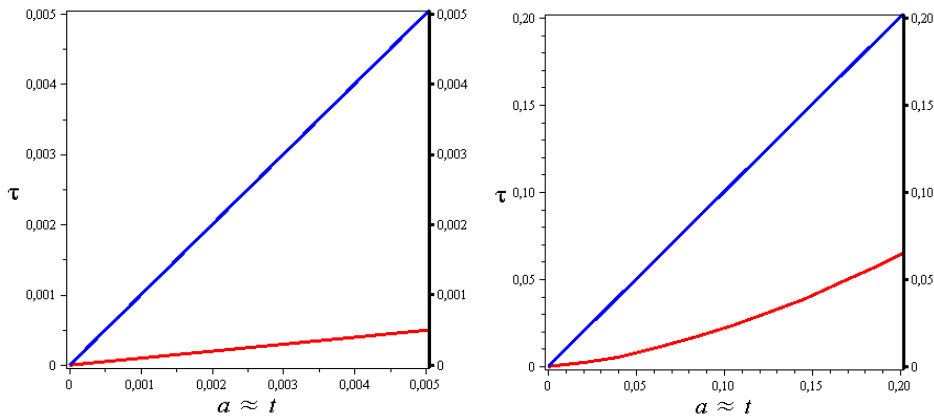


Рис. 2. Зависимости $\tau(a)$ (красная линия) и $t(a)$ (синяя линия) из (68).

Таким образом, из-за присутствия коэффициентов, содержащих малый параметр a/a_m , собственное время протекает в несколько раз медленнее, чем

мировое время. Как видно из Рис.2, коэффициент замедления времени составляет $4 \div 10$ раз и более.

3.2. Эпоха рекомбинации

В данной модели для фотонов, прибывших от эпохи рекомбинации, связь z с радиусом имеет вид (52). Локальным температурам рекомбинации $T \approx 4000^\circ \div 1100^\circ K$ соответствуют красные смещения $z \sim (3,3 \div 0,9) \cdot 10^3$ («невозмущённые» эффектами консервации [13]), радиусы $a \sim 193 \div 456$ млн.св.лет и собственный возраст вселенной $\tau \sim 3,7 \div 13,3$ млн.лет ($t \sim 193 \div 456$ млн.лет).

Эпоха рекомбинации длилась около $\Delta\tau \sim 9,7$ млн.лет ($\Delta t \sim 263$ млн.лет) и за это время радиус вселенной увеличился почти в 2.4 раза. Средняя плотность барионной материи при этом была больше нынешней ρ_0 в $10^7 \div 10^6$ раз:

$\rho_{rec} \sim (10^{-23} \div 10^{-24}) \text{ г/см}^3$, что того же порядка, что и нынешняя средняя плотность материи в крупных галактиках. Плотность энергии излучения была больше нынешней в среднем в 10^8 раз и была на три порядка меньше плотности энергии материи. Прежние расчёты свойств реликтового фона были основаны на оценках плотности ρ_{rec} в $10^3 \div 10^4$ раза больше.

Расстояние, пройденное фотоном за время прохождения неоднородностей пропорционально среднему времени между столкновениями τ_c и числу столкновений $N \approx \sigma_T n_e / \tau_c$, где n_e - плотность числа электронов и σ_T - сечение томсоновского рассеяния. Разделив плотность на массу бариона, находим концентрацию нуклонов, а значит и электронов: $n_e \sim (10^4 \div 10^2) \text{ см}^{-3}$. Учитывая $\sigma_T \simeq 0,7 \times 10^{-24} \text{ см}^{-2}$, получаем оценку:

$$\tau_c \sim (cn_e \sigma_T)^{-1} \simeq (0,5 \div 5) \times 10^{11} \text{ сек.} \quad (69)$$

Продолжительность периода рекомбинации $\Delta\tau_{rec} \approx 3 \times 10^{14}$ сек на 3 порядка больше среднего времени между столкновениями (69), т.е. за время рекомбинации происходят порядка 10^3 столкновений фотона с электронами.

Концентрация частиц вещества в эту эпоху была так мала, что их взаимными столкновениями можно пренебречь, а давление газа и звук практически отсутствуют. Реально происходящим процессом в этих условиях, кроме начинающегося гравитационного сгущения облаков, оказывается только взаимодействия частица-фотон до отрыва излучения от вещества и поэтому достаточно рассматривать только затухающую диффузию электронов, ионов и нейтральных атомов в намного более плотном газе фотонов.

Эффект консервации температуры реликтового потока при прохождении гравитационно-связанных областей (ГСО), таких как скопления галактик, был изучен в статье [13]. Было показано, что из-за выключения из потока космологического расширения части реликтового потока, пересекающие скопления остаются теплее по сравнению с нормально расширяющимся потоком вне скоплений.

В результате, вместо прежней парадигмы о практически стерильном распространении реликтового потока со времени рекомбинации, в действительности из ОТО и космологического принципа следует обратная картина. Смешивание потоков реликтовых фотонов, многократно изолированных в ГСО от

потока расширения, существенно меняет физические характеристики всего реликтового потока, в частности, ведёт к его изотропности и потере следов возмущений в ранние периоды.

Наблюдаемая анизотропия же следует из эффектов консервации при прохождении излучения в кратных слоях скоплений нашего близкого окружения в позднейшее время.

4. Жизненный цикл вселенной и космологические проблемы

4.1. Жизненный цикл вселенной

А) Большой Взрыв и очень ранняя вселенная

В рассмотренной простой модели расширения закрытой вселенной не учитывались эффекты гравитации вдоль 4-измерения и весь эффект от этого измерения пространства был сведён к кинематическим эффектам. Однако по мере приближения к наиболее ранним этапам радиус вселенной приближается к гравитационному радиусу вдоль 4-измерения, который с неизбежностью появляется в решениях уравнений Эйнштейна. В результате необходимо учитывать также гравитационное замедление времени и сокращение радиальных расстояний.

Решения уравнений Эйнштейна для пылевой 3-сферы хорошо известны (ссылки см. в [11]) и для замедления времени дают выражение:

$$d\tau(t) = dt \sqrt{1 - \frac{a_g^2}{a^2}} \sqrt{1 - \frac{\dot{a}^2}{1 - a_g^2/a^2}}, \quad a_g^2 = a_m a_l, \quad (70)$$

где $a_m = 2GM$ - максимальный радиус расширения, а $a_l \approx \delta a \geq l_{pl}$ - некая длина, характеризующая «толщину» 3-сферы в 4-измерении в радиальном направлении, которая не может быть меньше планковской длины l_{pl} .

Численно величина $a_m \approx 10^{28}$ см настолько большая, что значение a_l должно быть настолько же малым. Поскольку простая кинематическая модель достаточно удовлетворительно описывает данные, то a_l мало и можно взять наиболее «пессимистическое» значение, отождествив с планковской длиной:

$$a_l \approx l_{pl} \approx 10^{-33} \text{ см}, \quad a_g = \sqrt{a_m \cdot l_{pl}} \approx 10^{-2} \text{ см}. \quad (71)$$

Тогда планковская плотность, когда произойдёт гравитационное застывание соседних частиц, должна достигаться при $a \rightarrow a_m \approx 10^{-2}$ см. Если не учитывать гравитационное замедление времени, то плотность энергии будет порядка планковской плотности $\rho_{pl} \approx \rho_0 \cdot 10^{125} \approx 10^{95}$ г/см³ при $a \approx 10^{-2}$ см и $t \approx 10^{-15}$ сек.

При этих плотностях уже надо учитывать иерархию структур частиц на базе как Стандартной Модели, так и возможных моделей объединения взаимодействий, а также возможной субструктуры известных сейчас частиц. Это уже граница известной физики, где космологическая теория переходит в область гипотез.

Механизмы Большого Взрыва также относятся пока к вопросам, которые в рамках известной физики неясны. Но пока не будут исчерпаны все возможности моделирования с учётом известных частиц, полей и предполагаемых физических условий в ту эпоху, и эту проблему следует относить к проблемам, связанными лишь со сложностью структур и взаимодействий, а не с неизвестностью.

Б) Эволюция вселенной в период эры расширения

При нынешнем значении радиуса вселенной $a_0 \approx 13$ Гпс и радиусе максимального расширения $a_m \approx 70$ Гпс эра расширения будет длиться по собственному времени примерно 370 млрд.лет, из которых пока прошли лишь 4%.

Эта эра от Большого Взрыва и до нашего времени включает периоды, от которых имеются наблюдаемые свидетельства:

- 1) ранний период, когда сформировался состав частиц;
- 2) период нуклеосинтеза, когда формировались лёгкие ядра;
- 3) период рекомбинации, когда сформировались лёгкие атомы;
- 4) период структурообразования с формированием галактик и звёзд;
- 5) современный период.

В данной модели существенной корректировке подвергнутся сценарии первых трёх периодов с учётом новых физических условий – более низких плотностей или концентраций, а также большей длительности по времени. Дальнейшее развитие неоднородностей в звёзды и галактики (4- и 5-периоды) практически не связано с сугубо релятивистскими эффектами, но новая модель вносит достаточно много изменений в космологическую картину и в эти периоды.

Существенно изменятся расстояния до удалённых источников, особенно, квазаров и гамма вспышек, а также галактик, существенно возрастает число источников и масса вселенной из-за увеличения объёма при данном радиусе кривизны. Красные смещения теперь связаны с расстояниями немного иначе, как и наблюдаемые светимости с абсолютными светимостями. Меняются и оценки расстояний между источниками, а также эпох, в которые было испущено излучение и оценка поглощений и рассеяний в межгалактической среде. Существенно изменятся характеристики квазаров и гамма-вспышек из-за изменения расстояний. Все эти изменения имеют наблюдаемые следствия и дальнейшие сравнения модели с наблюдениями позволят уточнить сценарии эволюции объектов, а также более точно определить параметры вселенной.

В ходе последующей эволюции вселенной вплоть до остановки расширения успеют вспыхнуть и погаснуть десятки поколений звёзд средней массы. К концу эпохи образовавшиеся компактные объекты (белые карлики, нейтронные и адронные звёзды, а также гравитационно-сколлапсировавшие объекты) будут составлять основное звёздное население галактик. Сами галактики после многочисленных слияний могут укрупниться настолько, что центральные части многих из них могут снова превратиться в аналоги квазаров и вступить в горячую стадию эволюции. Тогда наблюдаемая картина таких сверхгалактик будет существенно отличаться от нынешней и их центральные части будут намного ярче периферии.

Расстояния между сильно связанными скоплениями галактик увеличатся в несколько раз, тогда как размеры многих из них существенно уменьшатся. Кроме компактных скоплений образуются и достаточно компактные сверхскопления.

Температура реликтового излучения ко времени остановки расширения будет на два порядка ниже, а искажения от скоплений и сверхскоплений станут несущественными для углового распределения температуры реликтового фона.

В) Эра сжатия вселенной и её специфические отличия

Эра сжатия будет длиться по собственному времени также примерно 370 млрд.лет и вместе с оставшимся временем эры расширения, до полного сжатия и Большого Коллапса осталось порядка 700 млрд.лет.

Эра сжатия в первую очередь будет отличаться сближением галактик и фиолетовым смещением их спектральных линий. Другое отличие будет связано с тем, что доминировать будут сверхгалактики с яркими ядрами и с большим числом компактных объектов, в особенности, фрозарами [3].

По мере сжатия и достижения температур ионизации водорода, гелия и других элементов оставшийся межзвёздный газ ионизируется, большая часть несветящегося вещества также перейдёт в состояние плазмы.

Однако, так как большинство вещества сосредоточится в компактных объектах, то, в частности, при сближении и слиянии белых карликов и нейтронных звёзд образуются сначала одиночные фрозары, а по мере сближения фрозаров будут возникать пары, тройки и четвёрки застывших комплексов из фрозаров. Отметим, что уже три фрозара не смогут слиться, так как гравитационный радиус системы примерно втрое превышает радиус поверхности каждого из них и они застывают целиком на некотором расстоянии друг от друга. Аналогичный процесс с участием ядер галактик и квазаров приведёт к образованию полужастывших комплексов из сверхмассивных фрозаров.

Таким образом, эра сжатия будет принципиально отличаться от эры расширения тем, что основная часть вещества будет застывать в форме фрозарных комплексов со всё более растущими гравитационными радиусами. В конечном итоге эти комплексы воспрепятствуют и дальнейшему сжатию вселенной в целом и сжатие до очень малых объёмов не произойдёт.

Г) *Большой Коллапс как Большое Застывание*

При образовании фрозарных комплексов и их слиянии в конечном итоге в тотальный фрозарный комплекс в масштабах вселенной, Большой Коллапс прекращается с переходом в Большое Застывание.

Однако, если до этого какие-либо процессы приведут к остановке сжатия и к последующему расширению, то начнётся новый цикл. Но, этот цикл уже не будет похож на предыдущий, так как большая часть вещества так и останется в виде фрозарных комплексов, которые никак не зависят от космологического расширения и эта застывшая материя будет проявляться лишь как тёмная материя.

В данной статье проблемы цикличности не будут рассматриваться, так как для этого пока нет каких-либо оснований. Далее будут рассмотрены только некоторые аспекты этой проблемы в связи с основными космологическими проблемами.

4.2. Отсутствие в модели прежних космологических проблем

А) *Отсутствие проблем плоскостности и тонкой настройки*

В фридмановской модели в ранние периоды пространство становится плоским с большой точностью. Действительно, записав уравнение Фридмана как:

$$\Omega^{-1} - 1 = \frac{const}{\rho a^2}, \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (72)$$

видим, что при доминировании как вещества, так и излучения имеем:

$$\frac{\Omega_0^{-1} - 1}{\Omega^{-1} - 1} = \frac{\rho a^3}{\rho_0 a_0^3} \frac{a_0}{a} = \frac{a_0}{a}, \quad (73)$$

$$\frac{\Omega_0^{-1} - 1}{\Omega^{-1} - 1} = \frac{\rho a^4}{\rho_0 a_0^4} \frac{a_0^2}{a^2} = \frac{a_0^2}{a^2} \quad (74)$$

и в обоих случаях $\Omega \rightarrow 1$ при $a \rightarrow 0$.

В модели же 3-сферы в 4-пространстве проблемы плоскостности нет, так как в этой модели уравнения Эйнштейна дают новое уравнение эволюции (44). В ранние периоды представим его в аналогичном (74) виде:

$$\frac{1}{\Omega(1-\dot{a}^2)} - 1 = \frac{const}{\rho a^2}, \quad (75)$$

и, ещё раз используя $1 - \dot{a}^2 = a^2 / a_m^2$, теперь получаем:

$$\frac{(a_m^2 / \Omega_0 a_0^2) - 1}{(a_m^2 / \Omega a^2) - 1} = \frac{\rho a^4 a_0^2}{\rho_0 a_0^4 a^2} = \frac{a_0^2}{a^2}. \quad (76)$$

Как видим, при уменьшении радиуса Ω и кривизна растут монотонно, что естественно:

$$\Omega \rightarrow \frac{a_m^2}{a^2}, \quad a \rightarrow 0. \quad (77)$$

Итак, в модели нет проблемы плоскостности и нет нужды в тонкой настройке.

Б) Однородность и изотропность как начальные условия

Аналогично моделям сферических звёзд, крупномасштабная однородность и изотропность распределения материи в закрытой космологической модели являются начальными условиями, обеспечивающими *сферическую симметрию* и не обязательно должны быть следствиями причинной связи разных областей. Если начальное распределение было однородным и изотропным, то именно оно приведёт к сферическому миру и *таким останется* на протяжении всего расширения.

На протяжении нескольких млн.лет радиационно-доминированной эпохи, а также около десятка млн.лет эпохи рекомбинации частицы вещества диффундируют как небольшая примесь в высокотемпературном газе фотонов и эта диффузия выравнивает любые существенные неоднородности в распределении вещества в причинно-связанных областях.

Наблюдаемый в нашу эпоху фронт реликтового излучения прошёл более 13 млрд.св.лет и непрерывно возмущался эффектами консервации температуры и плотности потока в гравитационно-связанных областях, таких как скопления галактик. Каждый участок наблюдаемого сейчас фронта образовался как смесь фотонов от достаточно большого числа окружающих участков.

В) Отсутствие проблемы горизонта

Проблема горизонта фридмановской модели состояла в том, что, с одной стороны, при расширении вселенной размер причинно-связанной области (горизонта) растёт как $r_{hor} \approx t$, тогда как масштабный фактор растёт медленнее - как $a \approx t^{1/2}$ в ранние периоды и как $a \approx t^{2/3}$ в поздние эпохи. С другой стороны, считалось, что реликтовый поток перестал взаимодействовать с веществом после эпохи рекомбинации и плотности излучения в причинно-несвязанных областях никак не могли быть выровнены, а на деле из них поступают к нам в среднем изотропные и однородные потоки.

В новой модели 3-сферы в 4-пространстве действующая парадигма меняется на обратную в двух аспектах. С одной стороны, радиус вселенной растёт во все эпохи быстрее, чем размер причинно-связанной области и, особенно, в ранние периоды. В данной модели радиальное расширение вселенной в прошлом шло почти со скоростью света в мировом времени $a \approx t$, а размер причинно-

связанной области растёт в локальном собственном времени $r_{hor} \approx \tau$, которое в ранние периоды было сильно замедлено по сравнению с мировым временем $\tau \ll t$. В этой ситуации начальное сферически-симметричное распределение радиационно-доминированной материи, требуемое космологическим принципом, сохраняется.

С другой стороны, из-за эффектов консервации излучения при прохождении скоплений галактик прежние наивные представления о «стерильном» распространении реликтового потока отпадают и заменяются новым механизмом смешивания по-разному возмущённых участков реликтового потока. В результате, однородность наблюдаемого потока оказывается следствием крупномасштабной однородности в распределении вещества в эпоху доминирования вещества.

Таким образом, в данной модели проблемы горизонта нет.

Г) Отсутствие проблемы начальной сингулярности

При сжатии закрытой вселенной в 4-пространстве при приближении радиуса $a(t)$ к гравитационному радиусу 3-сферы a_g собственные времена и сам процесс сжатия застывают в терминах космологического мирового времени t , а радиус $a(t) > a_g$ в любой конечный момент $t < \infty$ [11].

Этот сугубо релятивистский эффект точно такой же, как и для тонкой пылевой 2-сферы в обычном 3-пространстве, которая в системе покоя центра сферы застывает вне своего гравитационного радиуса $r_g = 2GM$, никогда не достигая этот радиус $r(t) > r_g$ в каждый *конечный* момент обычного мирового времени $t < \infty$. В этой системе отсчёта между r и r_g в любой конечный момент t имеется очень малое координатное расстояние $\delta r(t) = r(t) - r_g$, которому соответствует пространственно-подобный интервал собственного расстояния:

$$\delta s^2 = -\frac{\delta r^2}{1 - r_g / r} < 0. \quad (78)$$

В ОТО этот мгновенный интервал собственного радиального расстояния в покоящейся локально-инерциальной системе отсчёта инвариантен точно также, как инвариантен интервал собственного времени в одной точке пространства этой же локально-инерциальной системы отсчёта. При этом свойство пространственно-подобности интервалов инвариантно и если интервал (78) таков в данной системе отсчёта, то он останется пространственно-подобным при любых допустимых с физической точки зрения преобразованиях координат, в том числе и для любых локальных наблюдателей при $t < \infty$.

Для вселенной как 3-сферы ситуация в принципе точно такая же, так как и здесь

$$\delta s^2 = -\frac{\delta a^2}{1 - a_g^2 / a^2} < 0. \quad (79)$$

Поэтому при последовательном применении ОТО к закрытой модели проблема начальной космологической сингулярности не возникает.

Обычно принято считать, что проблема возникает тогда, когда процесс описывается с точки зрения сопутствующего наблюдателя в терминах его собственного времени. Но и в этом случае ОТО позволяет снять эту проблему.

Дело в том, что до сих пор рассматривалось сжатие всей вселенной до планковского объёма V_{pl} . Однако каждая из отдельных элементарных частиц есть «внешний наблюдатель» для любой другой частицы. В результате, при сближении до l_{pl} собственные времена частиц оказываются замедленными относительно мирового времени центра инерции данной системы частиц.

Поэтому в действительности в ОТО следует рассматривать сжатие *каждого* из N_0 нынешних частиц и образовавшихся ΔN квантов до объёма V_{pl} , после чего длина волны этих частиц перестаёт уменьшаться. В результате предельно малый объём вселенной V_{min} , до которого в принципе может продолжиться сжатие, есть сумма этих элементарных объёмов V_{pl} каждой из частиц и в единицах планковского объёма он всегда будет больше нынешнего числа частиц во вселенной:

$$V_{min} > N_0 V_{pl} \sim 10^{88} V_{pl}. \quad (80)$$

При достижении этого наименьшего объёма V_{min} частицы окажутся застывшими из-за собственных гравитационных полей и сжатие вселенной остановится в терминах космологического собственного времени τ тоже. Это ограничение со стороны ОТО имеет фундаментальный и модельно-независимый характер, так как следует из классической (неквантуемой) компоненты гравитационного поля.

Д) Отсутствие проблемы энтропии

Проблема большой величины энтропии ранее возникала также из-за того, что предполагалось сжатие вселенной до объёма одного V_{pl} .

В закрытой вселенной в 4-пространстве сжатие продолжается лишь до предельно малого объёма V_{min} (80) с сохранением числа частиц не менее нынешнего и здесь нет проблемы большой величины энтропии. В данной модели полная энергия вселенной отлична от нуля и сохраняется точно также, как сохраняется полная энергия тонкой пылевой 2-сферы в трёхмерном пространстве. Большое число элементарных объёмов при предельном сжатии и соответствующее «число ячеек» как раз и характеризуют энтропию вселенной, которая далее сохраняется также, как в целом сохраняется остаточное среднее число частиц в более поздние периоды расширения.

Е) Отсутствие проблемы космологической постоянной

Прежняя широко принятая парадигма космологии в основном базировалась на введении космологической константы Λ . Однако, её величина получалась настолько малой, что не могла быть объяснена не только Стандартной Моделью физики частиц, но и её гипотетическими обобщениями. Это и есть проблема космологической постоянной, которая оказалась практически неразрешимой в рамках прежних парадигм как космологии, так и физики частиц.

В предыдущих моих статьях по энергии вакуума уже было обосновано, что физика частиц не даёт ни теоретических, ни наблюдательных оснований для введения ненулевой плотности энергии вакуума. Это значит, что космология может быть в согласии с физикой частиц только при отсутствии космологической константы $\Lambda = 0$.

В закрытой модели в реальном 4-пространстве космологическая константа отсутствует, а уравнения Эйнштейна только с плотностью энергии материи вполне

достаточны для описания наблюдений. Это означает достижение полного согласия между космологией и физикой частиц в проблеме энергии вакуума.

Ж) Отсутствие проблемы космологической тёмной материи

Космологические модели устанавливают пределы для плотности тёмной материи. Из предсказываемой закрытой моделью полной плотности материи ρ_0 (32) вычитая наблюдаемую плотность барионной материи $\rho_{ob} \sim 0.3\rho_0$, для плотности тёмной материи получаем оценку $\rho_{dm} \simeq 0.7\rho_0 \sim 8 \text{ г/см}^3$, что сводит проблему к сугубо астрофизической компоненте.

К космологическим аспектам относятся также то, что объём 3-сферы в $3\pi/2 \approx 4.71$ раз больше объёма шара в плоском 3-пространстве и поэтому при одинаковой плотности и радиусе кривизны 3-сфера содержит в 4,71 раз больше массы, чем шар.

Кроме того, в замкнутом мире есть две геодезические – кратчайшая и кругосветная. Последняя ведёт к дополнительному гравитационному взаимодействию между источниками, что перенормирует гравитационную константу и дополнительно сдерживает расширение, особенно в ранние периоды. Всё это также можно трактовать как наличие эффективной тёмной материи.

З) Зарядовая асимметрия как начальное условие

Отсутствие античастиц (позитронов, антипротонов и антинейтронов) в наблюдаемой вселенной формально следует из факта нарушения CP -симметрии в горячей фазе, что ведёт к превышению числа частиц над античастицами порядка $10^{-8} \div 10^{-9}$, чего достаточно для образования нынешнего соотношения чисел фермионов и фотонов.

Если в прежних подходах ограничивались в основном механизмами нарушения сохранения барионного заряда в рамках гипотетических моделей Большого Объединения, то в данной трактовке предпочтительнее выглядят составные модели, в которых зарядовая симметрия может восстановиться на уровне субчастиц.

С другой стороны, нарушение CP -симметрии, как известно, может приводить после горячей фазы как к избытку частиц, так и к избытку античастиц. В рамках данной модели это позволяет рассматривать гипотетические сценарии, когда в одном цикле в горячей фазе выжило вещество и далее расширение идёт в режиме мира из вещества, а в одном из следующих циклов может выжить антивещество и вселенная проживёт этот цикл в режиме мира из антивещества или антимира. В целом, чередование миров и антимиров в большом числе циклов может быть равновероятным, в чём и могла бы выразиться зарядовая симметрия в масштабах *расширенного космологического времени* многих жизненных циклов вселенной.

И, наконец, в рамках данной модели в принципе возможно существование *соседних вселенных* в 4-пространстве, которые могут оказать наблюдаемое приливное воздействие, искажая структуру нашей вселенной. В таком случае в одном из них в горячей фазе могло выжить вещество, а в другом – антивещество. В целом, в чередовании миров из вещества и антивещества и может выразиться зарядовая симметрия в масштабах *расширенного космологического пространства* Большой Вселенной.

Заключение

Итак, при последовательном следовании ОТО и космологическому принципу есть веские теоретические и наблюдательные основания считать вселенную 3-сферой, расширяющейся (с замедлением) в реальном 4-пространстве.

Во-первых, Большой Взрыв мог происходить только во вселенной конечной массы и конечного объёма и простейшая (без произвольных гипотез и параметров) состоятельная модель стандартной ОТО с таким сценарием - это закрытая модель в 4-пространстве, которая при учёте кинематических эффектов точно решается и достаточно проста.

Во-вторых, наблюдаемые красные смещения удалённых сверхновых и основные космологические параметры хорошо описываются такой моделью при реалистических исходных параметрах, небольшой доле тёмной материи и без гипотетической тёмной энергии.

Наблюдательное открытие дополнительного космологического красного смещения в рамках ОТО должно трактоваться как первое косвенное проявление четвёртого измерения пространства, что имеет фундаментальные и далеко идущие последствия как для космологии, так и для физики частиц.

Итак, развитая в предыдущей [8] и в данной статьях трактовка релятивистской космологии практически однозначно следует из требований ОТО и основных принципов наблюдательной космологии, решает основные космологические проблемы и практически не создаёт новых проблем, хотя и ставит достаточно много задач для дальнейших исследований.

Дальнейшие усовершенствования модели связаны с учётом квантовых эффектов и эффектов физики частиц в сверхплотных состояниях, а также, при необходимости, эффектов 4-гравитации. Поскольку для объектов связь космологической компоненты их красных смещений с расстояниями можно считать известной, модель позволит более адекватно изучать собственную эволюцию и пространственное распределение удалённых источников.

Приложение 1. Теорема существования для 3-сферы

Теорема. Для существования d -сферы необходимо и достаточно погружение её в $(d+1)$ -мерное риманово пространство с плоской или центрально-симметричной метрикой в окрестности d -сферы.

Доказательством достаточности являются стандартные процедуры построения d -мерных сфер путём погружения их в пространство более высокого измерения.

Доказательство необходимости [11] основывается на том факте, что d -сфера топологически-инвариантным образом разделяет объемлющее многообразие на две несвязные (внешнюю и внутреннюю) области. В результате d -мерная «площадь» S_d d -сферы радиуса a пропорциональна $(d+1)$ -мерному объёму V_{d+1} внутренней области, которую сфера объемлет. Из выражений

$$S_d = \int_0^a \delta(a-r) r^d dr \int d^{d-1} \Omega = a^d \int d^{d-1} \Omega, \quad (81)$$

$$V_{d+1} = \int_0^a r^d dr \int d^{d-1} \Omega = \frac{a^{d+1}}{d+1} \int d^{d-1} \Omega, \quad (82)$$

следует

$$S_d = \frac{d+1}{a} \cdot V_{d+1}. \quad (83)$$

Если d -сфера не погружена в $d+1$ -мерное пространство, то объём внутренней области равен нулю $V_{d+1} = 0$, но тогда согласно (83) зануляется и d -мерная «площадь» самой сферы $S_d = 0$. Поэтому для существования d -мерной сферы необходимо погружение её (по меньшей мере) в $d+1$ -мерное пространство.

Для круга как одномерной сферы на плоскости и для 2-сферы в 3-пространстве формула (83) очевидна, а для 3-сферы в 4-пространстве имеем:

$$S_3 = 2\pi^2 a^2 = \frac{4}{a} \cdot \frac{\pi^2}{2} a^4 = \frac{3+1}{a} \cdot V_4. \quad (84)$$

Таким образом, 3-сферы с ненулевой «площадью» $S_3 > 0$ существует только при погружении, по меньшей мере, в 4-пространство, только после чего и будет существовать внутренняя область ненулевого 4-объёма $V_4 \sim S_3$.

Приложение 2. Уравнения Эйнштейна для закрытой модели в терминах мирового времени

Для гиперсферы в $D = 1 + 3$ пространстве-времени с мировым временем t и 3-сферическими координатами $x^\mu = (t, \chi, \theta, \varphi)$ метрика имеет вид (см. также [9]):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (85)$$

где $g_{00} = e^\nu = 1 - \dot{a}^2$. Символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ при такой метрике равны:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2} = \frac{-\dot{a}\ddot{a}}{1-\dot{a}^2}, \quad \Gamma_{11}^0 = a\dot{a}e^{-\nu} = \frac{a\dot{a}}{1-\dot{a}^2}, \quad \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}e^{-\nu} \sin^2 \chi = \frac{a\dot{a}}{1-\dot{a}^2} \sin^2 \chi, \quad \Gamma_{33}^1 = -\sin \chi \cos \chi \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}e^{-\nu} \sin^2 \chi \sin^2 \theta = \frac{a\dot{a}}{1-\dot{a}^2} \sin^2 \chi \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{22}^1 = -\sin \chi \cos \chi, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{23}^3 = \frac{\cos \chi}{\sin \chi}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (86)$$

Компоненты тензора Риччи $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\gamma} R_{\lambda\mu\gamma\nu}$ и скаляр Риччи $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ тогда принимают вид:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3}{a} \left(\ddot{a} - \frac{1}{2} \dot{a}\dot{\nu} \right) = -\frac{3\ddot{a}}{a(1-\dot{a}^2)}, \quad R_{22} = R_{11} \sin^2 \chi, \quad R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta, \\ R_{11} &= -\left(\frac{1}{2} a\dot{a}\dot{\nu} - a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 \right) e^{-\nu} + 2 = \frac{a\ddot{a}}{(1-\dot{a}^2)^2} + \frac{2}{1-\dot{a}^2}, \\ R &= -\frac{6}{a^2} \left(\frac{1}{2} a\dot{a}\dot{\nu} - a\ddot{a} - \dot{a}^2 - e^\nu \right) e^{-\nu} = -\frac{6}{a^2(1-\dot{a}^2)} - \frac{6\ddot{a}}{a(1-\dot{a}^2)^2}. \end{aligned} \quad (87)$$

Для сопутствующего 3-сфере материи с плотностью энергии ρ , давлением p и 4-скоростью $u^\mu = [(1-\dot{a}^2)^{-1/2}, 0, 0, 0]$ компоненты тензора энергии-импульса $T_\nu^\mu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu$ равны:

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p \quad (88)$$

Уравнения Эйнштейна

$$G_\nu^\mu = R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = \kappa_4 T_\nu^\mu, \quad (89)$$

в компонентах дают уравнения эволюции для радиуса, плотности и давления:

$$G_0^0 = \frac{3}{a^2} \left(1 + \frac{\dot{a}^2}{e^\nu} \right) = \kappa_4 \left[(\rho + p) \frac{e^\nu}{1-\dot{a}^2} - p \right], \quad (90)$$

$$G_1^1 = \frac{1}{a^2} \left[1 + \frac{1}{e^\nu} (\dot{a}^2 + 2a\ddot{a} - \dot{a}a\dot{a}) \right] = -\kappa_4 p, \quad (91)$$

При метрике $e^\nu = 1 - \dot{a}^2$ из линейного элемента (10) для 3-сферы, расширяющейся в 4-пространстве, эти уравнения принимают достаточно простую форму [9]:

$$\frac{1}{1-\dot{a}^2} = \frac{1}{3} \kappa_4 \rho a^2, \quad (92)$$

$$\frac{1}{1-\dot{a}^2} + \frac{2a\ddot{a}}{(1-\dot{a}^2)^2} = -\kappa_4 p a^2. \quad (93)$$

В обычных применениях теории гравитации в 3-пространстве константа κ_3 определялась так, чтобы для сферически-симметричного источника решение асимптотически давало закон Ньютона в плоском пространстве, откуда получали:

$$\kappa_3 = 4\pi \cdot 2G \quad (94)$$

где G - гравитационная константа. Однако, когда пространственная геометрия для однородного распределения материи с постоянной кривизной соответствует 3-сфере в 4-пространстве, «асимптотически плоскими» являются не удалённые области, а только локальные. Поэтому константу κ_4 нужно определять соответствующим образом учитывая нетривиальную топологию пространства и ниже мы это сделаем.

Для определения константы κ_4 , учтём, что (11) аналогично уравнению эволюции шара и в выражении для a_m можно использовать прежнее выражение (94) для κ_3 . Результат же приведём к виду, не зависящему от геометрии, чтобы он был применим для областей большего объёма:

$$\tilde{a}_m = 2G \cdot \frac{4\pi}{3} \tilde{a}^3 \rho_0 = 2GM, \quad M = \frac{4\pi}{3} \tilde{a}^3 \rho_0. \quad (95)$$

Здесь, вместо локальной плотности ρ_0 и 3-объёма шара радиуса \tilde{a} , мы выразили \tilde{a}_m напрямую через массу-энергию M материи в этой области. Таким образом, максимальный радиус расширения однородного шара a_m формально соответствует его «гравитационному радиусу».

Для вселенной же в целом теперь можем проделать эту же процедуру в обратном порядке - для a_m исходим из выражения для «гравитационного радиуса»

с массой-энергией вселенной M , а затем выразим её через локальную плотность на 3-сфере:

$$\begin{aligned} a_m &= 2GM = 2G \cdot 2\pi^2 a_0^3 \cdot \rho_0 = 4\pi^2 G \cdot a_0^3 \rho_0, \\ M &= 2\pi^2 a_0^3 \cdot \rho_0. \end{aligned} \quad (96)$$

В результате получаем искомое выражение для κ_4 :

$$\kappa_4 = 6\pi^2 \cdot 2G = 12\pi^2 G. \quad (97)$$

Литература

1. Einstein A. (1917) *Sitz. Preus. Akad. Wiss.* **1**, 142.
2. Friedmann A. (1922) *Zs. Phys.* **11**, 377.
3. Lemaître G. (1927) *Ann. Soc. Sci. Brux.*, **47A**, 49.
4. Hubble E. (1929) *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (3), 168.
5. Milne E. A. (1934) *Quart. J. Math. Oxf.* **5**, 64.
6. Lemaître G. (1933) *Ann. Soc. Sci. Brux.*, **53A**, 51.
7. Gamov G. (1946) *Phys. Rev.* **70**, 572.
8. Закир З. (2013) *Теор. физ., астрофиз. и космол.* **8**(2), 25.
9. Park Ch.-G. (2007) [arXiv:0710.1700](https://arxiv.org/abs/0710.1700).
10. Riess A. G. et al. (1998) *Astron. J.* **116**, 1009;
Perlmutter S. et al. (1999) *Astrophys. J.* **517**, 565.
11. Закир З. (2006) *Теор. физ., астрофиз. и космол.* **1**(3), 45.
12. Закир З. (2013) *Теор. физ., астрофиз. и космол.* **8**(1), 1; **8**(1), 8.
13. Закир З. (2013) *Теор. физ., астрофиз. и космол.* **8**(1), 17.