

Модель закрытой вселенной с релятивистским красным смещением

Захид Закир¹

Аннотация

Исходя из релятивистской динамики однородного расширяющегося шара сформулировано релятивистское уравнение эволюции для закрытой модели вселенной, корректно учитывающее релятивистское замедление собственных времён из-за разных скоростей расширения в разные эпохи. Гиперповерхность одновременности вселенной сферически-симметрична только в системе покоя центра 3-сферы и поэтому эволюция описана в мировом времени t этой системы отсчёта. Это релятивистское уравнение эволюции совпало с уравнением Эйнштейна для 3-сферы (без тёмной энергии), расширяющейся в 4-пространстве и имеет простое точное решение. При этом имеет место релятивистское красное смещение, которое ведёт к новой связи красного смещения с масштабным фактором, что затем даёт новое соотношение «светимость - красное смещение», согласующееся с данными по сверхновым типа Ia при приемлемых значениях параметров. Используя лишь начальные данные - радиус и скорость расширения - остальные свойства и эволюция вселенной предсказываются. В модели наблюдаемой плотности барионов составляет около одной трети полной энергии материи, а оставшиеся две трети есть плотность тёмной материи. Показано, что учёт в модели эффектов консервации лишь немного меняет значения параметров.

PACS: 04.20.Cv, 98.80.-k, 98.80.Jk 95.30.Sf, 97.60.Lf, 98.35.Jk, 98.54.-h, 98.80.-k, 04.60.-m

Ключевые слова: космологические модели, красное смещение, сверхновые IA

Содержание

Введение	25
1. Релятивистская динамика шара и новая закрытая модель	26
2. Новое релятивистское красное смещение в космологии	27
3. Структура и параметры вселенной в новой модели	30
4. Эффекты консервации красных смещений и интенсивности в скоплениях	32
Заключение	35
Приложение. Модель Фридмана из нерелятивистской динамики шара	37
Литература	38

Введение

В релятивистской космологии [1-5], исходящей из космологического принципа и сохранения энергии материи, Большой Взрыв – начальное плотное и горячее состояние вселенной – прямо совместимо только с закрытой моделью. Плоская и открытая модели с актуально бесконечным пространством при этом приводят к явным или скрытым противоречиям, и требует ряда гипотез и граничных условий.

В последние десятилетия данные по красным смещениям z и светимостям сверхновых типа Ia, используемых как «стандартные свечи», показали, что

¹ *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент, Узбекистан, zahidzakir@theor-phys.org*

объекты с ростом z становятся всё менее яркими, чем следует из стандартных фридмановских моделей [6,7]. «Объяснения» этого гипотезами о плоскостности и о тёмной энергии, ускоряющей расширение, также основаны на фридмановских моделях и вносят в них лишь неизвестный вид энергии.

Однако уже эффекты консервации частоты и светимости фотонов при прохождении скоплений галактик [8] показывают, что причиной наблюдаемой меньшей видимой светимости при данном z может быть более сложная связь z с масштабным фактором из-за неучтённых в модели релятивистских эффектов.

С другой стороны, неполноту фридмановских моделей показывает и тот факт, что уравнение эволюции в них следует из нерелятивистской динамики шара достаточно малого радиуса, распространённой на всю вселенную [5] (см. Приложение). Но для шара достаточно большого радиуса скорость расширения поверхности становится настолько большой, что релятивистские эффекты существенно модифицируют уравнение эволюции. Поэтому только релятивистское уравнение эволюции шара можно распространить к вселенной в целом. Целью настоящей статьи является нахождение такого уравнения и изучение его следствия для космологии.

В данной статье показывается, что последовательная версия закрытой модели (без тёмной энергии), более аккуратно учитывающая релятивистскую кинематику и геометрию 3-сферы, ведёт к новому соотношению «светимость – красное смещение», которое согласуется с наблюдениями. Модель предсказывает новое значение для полной плотности материи, также согласующееся с наблюдениями.

В разделах 1-3 приведены основные соотношения прежней и новой версий модели и проведено сравнение с наблюдениями, в разделе 4 учтены поправки эффектов консервации. В Приложении приведены также соотношения прежней версии закрытой модели.

1. Релятивистская динамика шара и новая закрытая модель

Приведённая в Приложении стандартная версия закрытой модели следует из нерелятивистской динамики расширяющегося шара [5], основанной на ряде приближений. При описании эволюции шара без ограничения его размера, и тем для более вселенной в целом, приближение слабой гравитации всё ещё применимо, но нерелятивистское приближение становится уже недопустимым.

Формально расширяющаяся 3-сфера отличается от расширяющейся 2-сферы только тем, что (угловой) линейный элемент на 2-сфере $d\Omega_{(2)}^2$ заменяется на линейный элемент на 3-сфере $d\Omega_{(3)}^2$. Эволюция же по радиальной переменной, которая нас и интересует, в обоих случаях должна быть практически одинаковой и поэтому сначала рассмотрим более наглядный пример 2-сферы. Если перейти на одну из сопутствующих 2-сфере локально-инерциальных систем отсчёта, то все остальные такие же локальные системы в других точках 2-сферы будут двигаться относительно неё с разными скоростями. В результате, из-за релятивистского сокращения, в сопутствующей точке поверхности инерциальной системе отсчёта 2-сфера становится эллипсоидом. Поэтому в действительности 2-сфера сферически-симметрична только в системе покоя её центра, где линейный элемент на поверхности, расширяющейся со скоростью $v = dr / dt$, принимает вид:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(t) \cdot d\Omega_{(2)}^2 = dt^2(1 - v^2) - r^2(t) \cdot d\Omega_{(2)}^2. \quad (1)$$

Здесь $d\tau = dt\sqrt{1-v^2}$ интервал собственного времени на 2-сфере.

На больших расстояниях между двумя точками на 2-сфере с $r(t)\theta$, также как и в 3-сфере с $a(t)\chi$, надо учитывать релятивистское замедление собственного времени из-за высокой скорости расширения и различия этой скорости в разное время.

Для этого необходимо перейти к релятивистской кинематике с разными интервалами собственного времени $d\tau(a)$ при разных a и ввести мировое время t системы покоя «центра» 3-сферы. При максимальном расширении с $r = r_m$, когда все частицы шара, как и всей вселенной, покоятся друг относительно друга, возможна однозначная синхронизация часов во всей вселенной.

Собственное время t именно этой системы отсчёта K_m , где покоится условный «центр» 3-сферы, и является естественным мировым временем закрытой вселенной. Более того, только в этой системе отсчёта вселенная есть 3-сфера. С учётом этих обстоятельств в дальнейшем перейдём к описанию расширения вселенной в K_m , где t измеряется в любую эпоху сопутствующими 3-сфере синхронно идущими координатными часами.

Собственное время на 3-сфере выразим через глобальное мировое время как в (1) (далее $\dot{a} \equiv da / dt$):

$$d\tau = dt\sqrt{1-\dot{a}^2}. \quad (2)$$

Линейный элемент на 3-сфере, таким образом, принимает вид, аналогичный (1):

$$ds^2 = dt^2 - da^2 - a^2(t) \cdot d\Omega_{(3)}^2 = dt^2(1-\dot{a}^2) - a^2(t) \cdot d\Omega_{(3)}^2. \quad (3)$$

Подставив (2) в (55), приходим к уравнению эволюции для вселенной в целом:

$$\frac{\dot{a}^2}{1-\dot{a}^2} = \frac{a_m}{a} - 1. \quad (4)$$

Аналогичное уравнение эволюции в другой форме ранее было получено Ч.-Г. Паком (уравнение (35b) в [9]) из уравнения Эйнштейна с линейным элементом (3), и оно изучалось в сочетании с (59) и тёмной энергией, но без учёта рассмотренного ниже релятивистского красного смещения.

2. Новое релятивистское красное смещение в космологии

В данной статье следствия релятивистского замедления собственного времени из-за скорости расширения 3-сферы и различия этой скорости в разные эпохи будут учтены более последовательно. Это замедление времени, учитывая (2) и (4), даётся выражениями:

$$d\tau(a) = dt \sqrt{\frac{a}{a_m}}, \quad \frac{\delta\tau(a_0)}{\delta\tau(a_z)} = \frac{dt_0}{dt_z} \sqrt{\frac{a_0}{a_z}}. \quad (5)$$

Из (5) и уравнения для траектории фотона:

$$ds^2 = dt^2(1-\dot{a}^2) - a^2(t) \cdot d\chi^2 = 0 \quad (6)$$

следуют формулы, совпадающие с (57)-(58).

Красное смещение z определяется по-прежнему через отношение длин волн (59), но теперь связь с масштабными факторами изменится и из (5) следует новое соотношение:

$$1+z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{\delta t_r}{\delta t_e} \sqrt{\frac{a_0}{a_z}}. \quad (7)$$

При испускании и приёме излучения в покоящейся 3-сфере было бы $\delta t_r = \delta t_e$. Но в расширяющейся 3-сфере расстояния между двумя точками растягиваются и поэтому период фотона в мирового времени, т.е. интервал между соседними гребнями волны, также растягивается пропорционально масштабному фактору:

$$\frac{\delta t_r}{\delta t_e} = \frac{a_0}{a_z}. \quad (8)$$

Отметим, что теперь $\delta\chi_r \neq \delta\chi_e$ из-за релятивистского растяжения длины волны.

С учётом (7)-(8) приходим к новым формулам, связывающим красное смещение с масштабным фактором:

$$1+z = \frac{a_0^{3/2}}{a_z^{3/2}}, \quad \frac{a_0}{a_z} = (1+z)^{2/3}. \quad (9)$$

Таким образом, при данном a релятивистское замедление собственных времён в более ранние эпохи (или поперечный эффект Доплера) ведёт к росту красного смещения фотонов с фактором $(a_0/a_z)^{1/2}$ или $(1+z)^{1/3}$.

Видимая светимость l , по определению, связан с телесным углом, под которым виден источник. При распространении потока фотонов в 3-сфере, расширяющейся с радиальной скоростью \dot{a} , ортогональной к самой 3-сфере, будет иметь место релятивистская абберация. В релятивистской кинематике элемент телесного угла $d\varphi d(\cos\theta)$ в системе покоя источника отличается от того же телесного угла в системе покоя наблюдателя $d\varphi d(\cos\theta')$ из-за его преобразования как:

$$d(\cos\theta') = \frac{1-v^2}{(1-v\cos\theta)^2} d(\cos\theta). \quad (10)$$

При испускании фотонов на 2-сфере (в поперечном к скорости направлении) при радиусе r_1 и скорости $v(r_1)$ и регистрации при радиусе r_2 и скорости $v(r_2)$, из-за такого различия элементов телесных углов отношение видимых светимостей будет содержать релятивистский фактор:

$$\frac{d\Omega_e}{d\Omega_r} = \frac{1-v_1^2}{1-v_2^2}. \quad (11)$$

Если $v(r_2) < v(r_1)$, то имеем $d(\cos\theta_2) > d(\cos\theta_1)$ и поэтому $l_2 < l_1$.

Аналогично, на 3-сфере отношение элементов телесного угла у приёмника $d\Omega_r$ и у источника $d\Omega_e$ будут отличаться на фактор релятивистской абберации:

$$\frac{d\Omega_e}{d\Omega_r} = \frac{1-\dot{a}_z^2}{1-\dot{a}_0^2} = \frac{a_z}{a_0} = \frac{1}{(1+z)^{2/3}}. \quad (12)$$

Итак, релятивистская абберация уменьшает видимую светимость l , что выражается умножением на дополнительный фактор $(1+z)^{-2/3}$.

Учитывая (12), вместо формулы (61) получаем:

$$l = \frac{L}{4\pi d_{h,0}^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 \sin^2 \chi_z} \cdot \frac{1}{(1+z)^{8/3}}, \quad (13)$$

и $d_{p,0}$ имеет вид:

$$d_{p,0} = a_0 \sin \chi \cdot (1+z)^{4/3} = 10^{-5+(m-M)/5} \text{ Mpc}, \quad (14)$$

откуда следует выражение для модуля расстояния:

$$\mu = 5 \lg [a_0 (1+z)^{4/3} \cdot \sin \chi] + 25. \quad (15)$$

Подставив (58) и (9) в (15), получаем новую формулу для модуля расстояния:

$$\mu = 5 \lg \left\{ 3(1-b)Z \left[Z - 1 - (1-2b) \left(\sqrt{(Z-b)/(1-b)} - 1 \right) \right] \right\} + A, \quad (16)$$

где $Z \equiv (1+z)^{2/3}$ и

$$A = 5 \lg(c / H_{obs}) + 25, \quad H_{obs} = \frac{3}{2} H_0 = \frac{3c}{2a_0} \frac{1}{\sqrt{b^{-1}-1}}. \quad (17)$$

Формула (16) заменяет формулу Маттига (64), не учитывающей релятивистского красного смещения. Записав $H_{obs} = h_0 \cdot 100 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1} \text{ Мпс}^{-1}$, будем пользоваться h_0 .

При $b = 1/2$ формула (16) упрощается:

$$\mu = 5 \lg [1.5 Z(Z-1)] + A. \quad (18)$$

При малых z разложение формулы (16) в ряд даёт:

$$\mu \approx 5 \lg(z + \gamma z^2) + A, \quad (19)$$

$$\gamma(b) = (4-5b)/6(1-b), \quad \gamma(1/2) = 1/2 \quad (20)$$

Для сравнения с наблюдениями (16) как нового соотношения $\mu - z$ мы будем пользоваться набором данных для 601 сверхновых типа Ia (SN Ia): 580 из компиляции Union 2.1 [10] (для 15 из них используем данные из [14]), 3 новых объекта с $z_s = 1.55$ [11], $z_s = 1.71$ [12] и $z_s = 1.91$ [13], а также 33 объектов из "чистого" набора [14].

Константа h_0 в (16) является модельно-независимой и должна определяться при малых z в интервале $0.03 < z < 0.1$, где локальные скорости уже не сильно искажают данные, а нелинейные по z вклады ещё малы. В этом интервале 95 объектов дают $h_0 = 0.698$ с хорошей точностью ($\chi^2 / N \approx 0.87$).

При известном h_0 модель позволяет выразить собственный возраст вселенной τ_0 через константу b (см. формулу (25)). Поэтому мы можем b зафиксировать из наблюдательного ограничения на возраст вселенной. Приближение пылевой материи, которой мы пользовались, было справедливо как минимум $13.2 < \tau_0 < 13.7$ млрд.лет, что даёт нам $0.25 > b > 0.11$.

Как показывает Рис.1 (красная линия), при значениях параметров

$$h_0 = 0.698, \quad b = 0.18 \pm 0.07, \quad (21)$$

предсказания формулы (16) для $z > 0.1$ согласуются с наблюдательными данными вплоть до $z \sim 1.9$ с точностью $\chi^2 / N \approx 1.03$.

Отметим, что из-за изменения расстояний до источников с данным z по сравнению с прежними моделями в плоском пространстве, результаты наблюдений должны быть скорректированы с учётом дополнительного поглощения и рассеяния.

Поправки эффектов консервации z и светимости излучения при прохождении скоплений галактик из-за выключения из потока космологического расширения [8] ещё более существенны и они будут учтены в разделе 4.

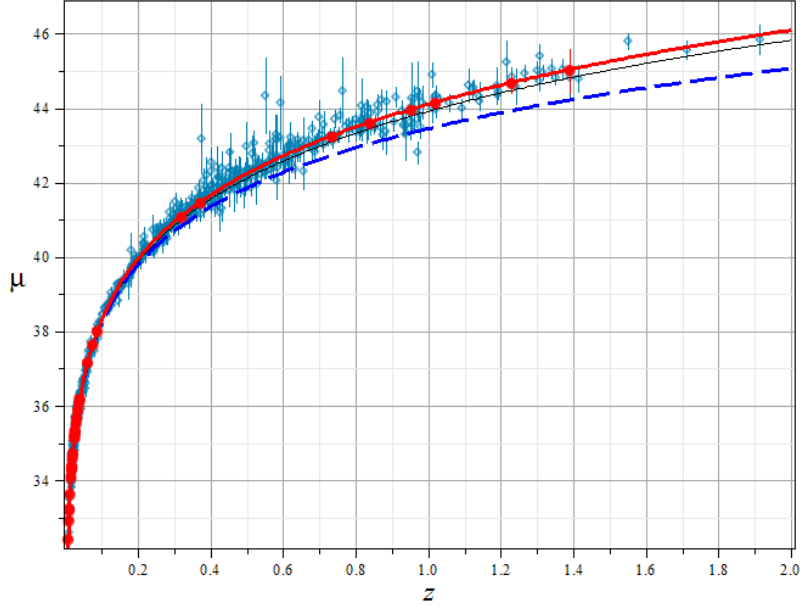


Рис.1. Зависимость модуля расстояния μ от красного смещения z . Точки - наблюдательные данные для 568 SN Ia из [10-13] (синие ромбы) и 33 “чистых” SN Ia из [14] (красные кружки), красная кривая – по формуле (16) при $h_0 = 0.698$, $b = 0.20 \pm 0.10$, тонкая кривая – по формуле (18) и синяя пунктирная – по формуле Маттига (64) с $q_0 = 1/2(1-b) = 0.63$.

3. Структура и параметры вселенной в новой модели

В закрытой модели основные характеристики вселенной и её эволюция определяются в основном двумя параметрами: a_0 и a_m . Связи между скоростью расширения, радиусом и временем следуют из (4):

$$\dot{a} = \pm \sqrt{1 - a/a_m}, \quad \dot{a}_0 = \sqrt{1-b}, \quad a = t - t^2/4a_m, \quad (22)$$

$$t = 2a_m \left(1 - \sqrt{1 - a/a_m}\right), \quad t_0 = 2a_m \left(1 - \sqrt{1-b}\right). \quad (23)$$

Мировое время от начала до максимального расширения есть $t_m = 2a_m$ и, кроме того, в ранние периоды ($t \ll a_m$) расширение идёт по линейному закону $a(t) \sim t$. Собственное время от начала расширения есть:

$$\tau = \int_0^t dt \sqrt{1 - \dot{a}^2} = - \int_0^a \frac{da \sqrt{a}}{\sqrt{a_m - a}} = a_m \arcsin \sqrt{\frac{a}{a_m}} - \sqrt{a(a_m - a)}, \quad (24)$$

$$\tau_0 = a_m \left(\arcsin \sqrt{b} - \sqrt{b(1-b)} \right). \quad (25)$$

Интервал собственного времени от Большого Взрыва до остановки при $a(\tau_m) = a_m$, таким образом, равен $\tau_m = a_m \pi/2$ и меньше интервала координатного времени до этого момента: $\tau_m < t_m$. Хотя эти выражения получены без учёта плотности

энергии и давления излучения, тем не менее, они дают возраст вселенной довольно близкую к реальной, так как период, когда доминировало излучение существенно меньше полного возраста.

В любой закрытой модели интересно определить, успевают ли световой сигнал обойти сферическую Вселенную за время расширения? Для χ получаем:

$$\chi_0 = \int_0^{t_0} \frac{dt \sqrt{1-\dot{a}^2}}{a} = 2 \int_0^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{t(4a_m-t)}} = 2 \arccos \left(1 - \frac{t_0}{2a_m} \right) \quad (26)$$

$$\cos \frac{\chi_0}{2} = 1 - \frac{t_0}{2a_m}. \quad (27)$$

Как видим, фотоны, испущенные в начале расширения, к моменту максимального расширения ($t_m = 2a_m$, $b_m = 1$) успевают дойти лишь от одного полюса до следующего полюса ($\chi = \pi$). Из (57) также видно, что если сейчас $b \approx 0.18$, то реликтовое излучение было испущено от областей ближе экватора 3-сферы:

$$\chi_0 = \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-2b) \approx 0.88 \approx 50^\circ. \quad (28)$$

Поэтому эта версия закрытой модели не ведёт к прямым эффектам периодичности.

Для параметра H_z получаем в терминах мирового времени ($c \neq 1$):

$$H_z = \frac{\dot{a}_z}{a_z} = \frac{c}{a_z} \sqrt{1 - \frac{a_z}{a_m}}, \quad H_0 = \frac{c}{a_0} \sqrt{1-b} = \frac{2}{3} H_{obs} \sqrt{b}, \quad (29)$$

и собственного времени сопутствующей сфере наблюдателя:

$$\bar{H}_z = \frac{1}{a_z} \frac{da_z}{d\tau} = \frac{H_z}{\sqrt{1-\dot{a}_z^2}} = H_z \sqrt{\frac{a_m}{a_z}} = H_{obs} \frac{2(1+z)}{3\sqrt{1-b}} \sqrt{1 - \frac{b}{(1+z)^{2/3}}}. \quad (30)$$

В дальнейшем вместо a и a_m удобнее использовать b и H_{obs} , входящие в формулу (16) для модуля расстояния и определяемые из данных:

$$a_0 = \frac{3c}{2H_{obs}} \sqrt{b^{-1}-1}, \quad a_m = \frac{a_0}{b}. \quad (31)$$

В закрытой модели имеет место ограничение:

$$b \equiv \frac{a_0}{a_m} = \frac{a_0 c^2}{2GM} = \frac{c^2}{G\rho_0(2\pi a_0)^2} < 1. \quad (32)$$

что даёт нижний предел для полной плотности материи $\rho_0 > \rho_{3c}$ с:

$$\rho_{3c} = \frac{c^2}{G(2\pi a_0)^2} = \frac{1}{9\pi^2 G} \cdot \frac{H_{obs}^2}{(b^{-1}-1)} = \frac{8}{27\pi(b^{-1}-1)} \rho_c. \quad (33)$$

Эта новая критическая плотность ρ_{3c} закрытой модели более чем в 40 раз меньше критической плотности прежней модели $\rho_c = 3H_{obs}^2 / 8\pi G \approx h^2 \cdot 1.88 \cdot 10^{-29}$ г/см³.

Полная плотность энергии материи $\rho_0 = \rho_m$ в наше время следует из (32) и её значение предсказывается моделью. При найденных значениях параметров модели она в $b^{-1} = 5$ раз больше новой критической плотности ρ_{3c} и равна:

$$\rho_m = \frac{c^2}{Gb} \frac{1}{(2\pi a_0)^2} = \frac{\rho_{3c}}{b}. \quad (34)$$

Плотность барионов ρ_b , следующая из наблюдательных данных составляет: $\rho_b \approx 3.4 \times 10^{-31}$ г/см³ и соответствует около 1/3 от ρ_m (Табл.1).

Плотность тёмной материи ρ_{dm} есть разница между ρ_m и ρ_b , т.е. $\rho_{dm} = \rho_m - \rho_b$. Поэтому, предсказываемая моделью плотность тёмной материи составляет около 2/3 от ρ_m .

Полная масса вселенной M конечна, сохраняется и определена a_m :

$$M = a_m c^2 / 2G \sim 1.5 \cdot 10^{57}. \quad (35)$$

Среднее число галактик конечно и оценивается делением доли галактик $0.03M$ в M на среднюю массу галактики $\bar{M}_{gal} \sim 10^{11} M_\odot \sim 10^{44} g$. При этом получаем: $N_{gal} \geq 0.03M / \bar{M}_{gal} \sim 2 \cdot 10^{11}$, что близко к оценкам из наблюдений.

При значениях (21) и близких к ним значениях параметров модели основные параметры Вселенной приведены в Таблице 1.

h_0	b	a	a_{max}	τ	τ_{max}	t	t_{max}	ρ_m	ρ_b / ρ_m	ρ_{dm} / ρ_m	M
0,670	0,15	51	342	13,9	537	53	685	10	36%	64%	22
0,680	0,20	43	216	13,7	339	46	431	10	33%	67%	14
0,680	0,25	37	149	13,5	235	40	299	11	31%	69%	10
0,698	0,11	60	543	13,7	853	62	1087	10	35%	65%	35
0,698	0,18	45	249	13,4	391	47	498	10	33%	67%	16
0,698	0,25	36	146	13,2	229	39	291	11	30%	70%	9
0,710	0,15	49	328	13,3	515	51	656	10	33%	67%	21
0,710	0,20	41	207	13,1	324	44	413	11	31%	69%	13
0,710	0,25	36	143	13,0	225	38	286	12	29%	71%	9

Таблица 1. Параметры Вселенной в закрытой модели с релятивистским красным смещением (без поправок на эффекты консервации). Радиусы a , a_{max} в млрд.св.лет, возрасты τ , τ_{max} , t , t_{max} в млрд.лет, полная плотность материи ρ_m в 10^{-31} г/см³, полная масса M в 10^{56} г.

Модель также предсказывает ряд эффектов, связанных с геометрией 3-сферы, кинематикой с релятивистскими эффектами, а также их сочетанием. Геометрические эффекты сферического мира проявляются как универсальные свойства объектов, не зависящие от их природы.

4. Эффекты консервации красных смещений и интенсивности в скоплениях

В статьях [8] изучались новые космологические эффекты – консервация частоты и светимости излучения из-за выключения из потока расширения при прохождении гравитационно-связанных областей (ГСО), наиболее крупными из которых являются скопления галактик. При прохождении скоплений эти эффекты ведут к существенному уменьшению наблюдаемых (спектроскопических) красных смещений z_s и увеличению видимой светимости источников. С масштабным фактором прямо связаны нормальные красные смещения z фотонов, не прошедших

скопления и они дают истинные расстояния до источников, которые больше, чем следует из z_s . Эффекты усиливаются с ростом расстоянием из-за множества пересекаемых излучением скоплений и большей близости соседних скоплений в более ранние эпохи.

Радиус ГСО r_s определяется точкой «нулевого ускорения»:

$$H_0^2 r_s = \frac{GM}{r_s^2}, \quad r_s = \frac{(GM)^{1/3}}{H_0^{2/3}}. \quad (36)$$

Считая, что изменения расстояний между скоплениями галактик в среднем связаны с космологическим расширением, получаем:

$$\Delta l_c = \Delta l_{0c} \frac{a}{a_0}, \quad \Delta l_g = \Delta l_{g0} \frac{H_0^{2/3}}{H^{2/3}}, \quad f = \frac{\Delta l_g}{\Delta l_c} = f_0 \frac{a_0 H_0^{2/3}}{a H^{2/3}}. \quad (37)$$

Наблюдаемое (спектроскопическое) красное смещение z_s определяется отношением собственных длин волн фотонов при регистрации (λ_r) и испускании (λ_e), тогда как отношение a_0 к a_z определяет нормальное (“эффективное”) красное смещение z , которое фотоны имели бы, если бы не пересекали ГСО. Из (9) имеем:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = 1 + z_s, \quad \frac{\bar{\lambda}_r}{\lambda_e} = 1 + z. \quad (38)$$

В однородном мире эти два определения совпадают, однако при наличии ГСО эти определения не эквивалентны и $z_s < z$.

При прохождении фотонами расстояния Δl_c между соседними скоплениями релятивистское красное смещение с фактором $(a_0 / a_z)^{1/2}$ происходит везде, тогда как растяжение длины волны λ из-за расширения происходит только вне Δl_g , т.е. в части этого расстояния, равной $(1 - f)\Delta l_c$. В результате здесь имеет место уравнение:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{da}{a} - f \frac{da}{a}. \quad (39)$$

С учётом (37) это уравнение приобретает вид:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{da}{a} - \bar{w} \frac{da}{a^2 H^{2/3}}, \quad (40)$$

где $\bar{w} = f_0 a_0 H_0^{2/3}$. В новой версии закрытой модели имеем:

$$H = \frac{\dot{a}}{a\sqrt{1-\dot{a}^2}} = \frac{a_m^{1/2} c}{a^{3/2}} (1 - a/a_m)^{1/2}, \quad H_0 = \frac{c}{a_0} (b^{-1} - 1)^{1/2} \quad (41)$$

и уравнение (40) переходит в:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{da}{a} - w \frac{da}{a(1 - a/a_m)^{1/3}}, \quad (42)$$

где $w = f_0 y_0$, $y_0 = (1 - b)^{1/3}$ и $b = a_0 / a_m$. Интегрирование этого уравнения даёт искомую связь между z_s и z :

$$1 + z_s = (1 + z) \cdot \frac{\exp\{3^{1/2} w \cdot \arctan[(1 + 2y_z)/3^{1/2}]\}}{G \cdot [1 + 3y_z / (1 - y_z)^2]^{w/2}}, \quad (43)$$

где:

$$y = (1 - a/a_m)^{1/3} = [1 - b/(1+z)^{2/3}]^{1/3},$$

$$G = \frac{\exp\{3^{1/2}w \cdot \arctan[(1+2y_0)/3^{1/2}]\}}{[1+3y_0/(1-y_0)^2]^{w/2}}. \quad (44)$$

Для выражения z через z_s нам нужно обратить (43) и мы выполним это путём аппроксимации. Зависимость $z_s(z)$ гладкая (Рис. 2), так что, взяв первые два члена разложения в ряд правой части (43) и используя поправочный коэффициент α , получаем:

$$z_s \approx Kz + Qz^2, \quad (45)$$

$$K = 1 - \frac{2}{3}f_0, \quad Q = -\frac{\alpha f_0}{27} \left(11 - \frac{2}{1-b} + 6f_0 \right). \quad (46)$$

Далее для каждого сочетания параметров b, f_0 подбираем такой α , чтобы (45) давал близкую к (43) кривую при $z_s < 2$ и затем из (45) получаем соотношение:

$$z \approx \frac{K}{2Q} \left(\sqrt{1 + \frac{4Q \cdot z_s}{K^2}} - 1 \right) \quad (47)$$

Эффекты консервации в ГСО изменяют также видимые светимости. Излучению от источника с абсолютной светимостью L и не прошедшему через ГСО соответствовала бы видимая светимость $\bar{l} = L/[4\pi d_0^2 \cdot (1+z)^2]$, где d_0 - фотометрическое расстояние. Если поток проходил через ГСО, то \bar{l} надо выразить через видимую светимость l [8].

Увеличение l из-за меньшего растяжения интервала времени прибытия фотонов и меньшего красного смещения их энергии даётся коэффициентом $B_{\delta z}^2$:

$$B_{\delta z}^2 = \left(\frac{a_0/a_z}{\lambda_z/\lambda_0} \right)^2 = \left(\frac{1+z}{1+z_s} \right)^2. \quad (48)$$

Нормальный поток вне скопления с телесным углом $\pi\varepsilon^2$ расширится больше, чем внутренний и произойдёт сужение пучка из-за консервации, так что соответствующее увеличение l будет выражаться коэффициентом $C_{\delta\varepsilon}$:

$$C_{\delta\varepsilon} = \frac{\pi\varepsilon_z^2}{\pi\varepsilon^2} = \left(\frac{1+z}{1+z_s} \right)^{4/3} \quad (49)$$

Введя также коэффициент уменьшения видимой светимости при дополнительном поглощении и рассеянии $D_{\delta z}$ из-за большей удалённости источников, для истинной светимости источника \bar{l} получаем:

$$\bar{l} = l \cdot \frac{D_{\delta z}}{B_{\delta z}^2 C_{\delta\varepsilon}^2} = l \cdot \left(\frac{1+z_s}{1+z} \right)^{10/3} D_{\delta z}, \quad (50)$$

Отметим, что при $z \ll 1$ имеем $z_s \sim (1-2f_0/3) \cdot z + O(\bar{z}^2)$, что ведёт либо к перенормировке H_0 , либо абсолютной звёздной величины M :

$$\bar{H}_0 = \frac{H_{obs}}{1 - 2f_0/3} \quad \text{или} \quad \bar{M} = M + 5 \lg(1 - 2f_0/3). \quad (51)$$

Поправки на поглощение и рассеяние излучения прошедшего гало галактик обычно около $\Delta m \approx 0.03$ при $z_s = 1.0$. С учётом этой поправки и выражения для истинного (неискажённого скоплениями) модуля расстояния получаем [8]:

$$\bar{\mu}_{obs}(z) = \mu_{obs}(z_s) + (5/3) \cdot 5 \lg[(1+z)/(1+z_s)] + (z_s - z) \cdot 0.03/z_s. \quad (52)$$

Сравнение модуля расстояния из новой модели (16) с модулем расстояния из наблюдений с поправками на эффекты консервации $\bar{\mu}_{obs}(z)$ из (52) показано на Рис. 2 (с $\chi^2/N = 1.07$). Параметр $h_0 = 0.698$ опять фиксируем в интервале $0.03 < z < 0.1$ по 103 объектам (с $\chi^2/N = 0.96$). При $0.20 > b > 0.10$ для периода времени, когда было справедливо приближение пылевой материи из (25) следует: $12.7 < \tau_0 < 13.0$ млрд.лет. Как показывает Рис.2, при значениях параметров:

$$h_0 = 0.734, \quad b = 0.15 \pm 0.05, \quad (53)$$

предсказания формулы (16) для $z > 0.1$ согласуются с наблюдательными данными для SN Ia вплоть до $z_s \sim 1.9$, $z \sim 2.5$ с точностью $\chi^2/N \approx 1.03$.

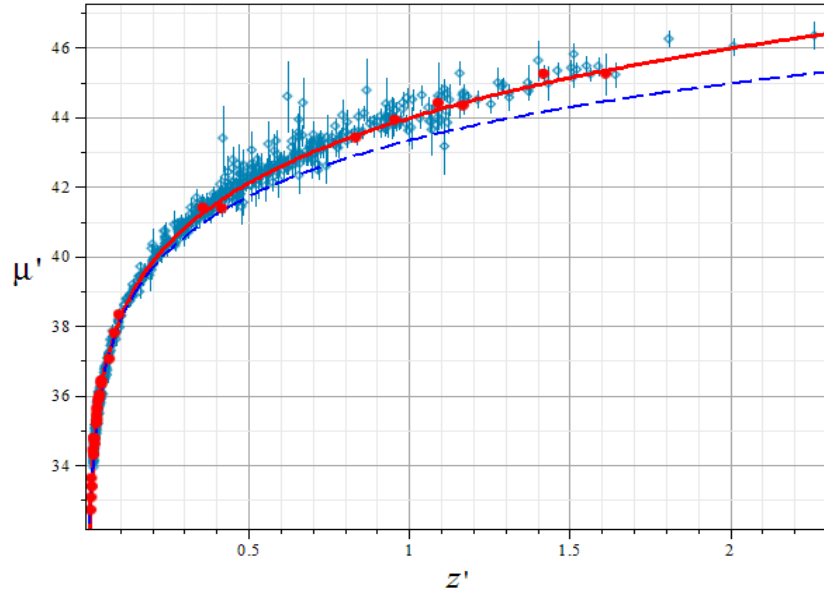


Рис. 2. Диаграмма модуль расстояния – красное смещение SNe Ia с учётом эффектов консервации. Значения $\bar{\mu}_{obs}(z) = \bar{m} - \bar{M}$ и z вычислены из (52) и (47) для 568 SN из [10-13] (синие ромбы) и 33 “чистых” SN из [14] (красные кружки). Красная кривая - по формуле (16) при $h_0 = 0.734$, $b = 0.15 \pm 0.05$.

Как уже отмечалось в [8], для большей точности поправки на консервацию должны изучаться для каждого наблюдаемого объекта индивидуально, учитывая влияние каждого из пройденного фотонами скопления галактик.

h_0	$h_{0,stat}$	b	a	a_m	τ	τ_m	t	t_m	ρ_m	ρ_b	ρ_{dm}	M
0,650	0,722	0,15	48	322	13,1	506	50	645	11	32%	68%	21
0,650	0,722	0,20	41	203	12,9	319	43	406	11	30%	70%	13
0,650	0,722	0,25	35	141	12,7	221	38	281	12	28%	72%	9
0,661	0,734	0,11	57	516	13,0	811	58	1033	11	32%	68%	33
0,661	0,734	0,18	43	237	12,8	372	45	474	12	29%	71%	15
0,661	0,734	0,25	35	138	12,5	217	37	277	13	27%	73%	9
0,680	0,756	0,15	46	308	12,5	484	48	616	12	29%	71%	20
0,680	0,756	0,20	39	194	12,4	305	41	388	13	27%	73%	12
0,680	0,756	0,25	34	134	12,2	211	36	269	13	25%	75%	9

Таблица 2. Параметры Вселенной в закрытой модели с релятивистским красным смещением с поправками на эффекты консервации при $f_0 = 0.15$. Радиусы a , a_{max} в млрд. св. лет, возрасты τ , τ_{max} , t , t_{max} в млрд. лет, плотность материи ρ_m в 10^{-31} г/см³, масса M в 10^{56} г.

Округлённый состав энергий в закрытой модели по Табл. 2 приведён на Рис. 2.

Заключение

Приведённая в статье новая версия закрытой модели вселенной, как основанная на стандартной ОТО без добавления к ней гипотез, является реалистичной основой для релятивистской космологии. Хотя исходные положения модели естественны и просты, результаты оказались неожиданно успешными.

Во-первых, закрытая модель теоретически наиболее предпочтительный случай как естественно согласующаяся с космологическим принципом в 3-пространстве и фактом Большого Взрыва.

Во-вторых, при учёте релятивистских эффектов модель становится не только более последовательной, простой и точно решаемой, но и описывает существующие наблюдательные данные без тёмной энергии.

В-третьих, наблюдательное открытие дополнительного красного смещения связано не с ускорением и тёмной энергией, а с прямым проявлением релятивистского замедления собственных времён при космологическом расширении

Таким образом, имеются веские теоретические и наблюдательные основания считать вселенную 3-сферой, расширение которой замедляется.

Интерпретация этого явления как возможно первое наблюдательное проявление дополнительного измерения будет развита в следующей статье [15].



Рис. 3. Состав энергий закрытой Вселенной.

Приложение. Модель Фридмана из нерелятивистской динамики шара

Для ясности в тех аспектах фридмановской модели, которые в новой версии закрытой модели сохраняются или изменяются, её основные соотношения приведём в тех же обозначениях, в каких будет записана новая версия.

Уравнения Фридмана для эволюции вселенной, как известно, проще всего получить из ньютоновской модели Милна [5], в которой эволюция однородного пылевого шара радиуса r и массы $m = \rho \cdot 4\pi r^3 / 3$, где ρ - средняя плотность энергии материи, описывается при нерелятивистской скорости расширения. Для этого шар должен быть достаточно большим, чтобы быть однородным и расширяться, но и не слишком большим, чтобы скорость поверхности относительно центра шара оставалась нерелятивистской.

В этой модели полная энергия объекта единичной массы, сопутствующего поверхности шара, имеет вид:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{Gm}{r} = E, \quad E = \text{const}. \quad (54)$$

где τ - время, G - гравитационная константа. Вставив в (54) $r(\tau) = a(\tau)\chi$ и подобрав значение E , приходим к уравнению эволюции Фридмана для вселенной:

$$\left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{a_m}{a} - 1, \quad a_m \equiv 2GM. \quad (55)$$

Из (55) и уравнения для траектории радиально-распространяющегося света:

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau) \cdot d\chi^2 = 0 \quad (56)$$

следует:

$$\chi_z = \int_{a_z}^{a_0} \frac{da}{a} \cdot \frac{d\tau}{da} = \int_{a_z}^{a_0} \frac{da}{\sqrt{a(a_m - a)}} = \arcsin \left(1 - \frac{2a_z}{a_m} \right) - \arcsin \left(1 - \frac{2a_0}{a_m} \right). \quad (57)$$

Введя $b \equiv a_0 / a_m$, запишем (57) в виде:

$$\sin \chi_z = 2\sqrt{b}\sqrt{1-b} \left[\left(1 - 2b \frac{a_z}{a_0} \right) - (1-2b) \sqrt{\frac{a_z}{a_0}} \sqrt{\frac{1-ba_z/a_0}{1-b}} \right]. \quad (58)$$

Красное смещение z длин волн при приёме λ_r по сравнению с длиной при испускании λ_e и связь с масштабным фактором в нерелятивистской динамике определены как:

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_e} = 1 + z, \quad \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_z}. \quad (59)$$

При частном значении $b = 1/2$ второй член в (58), пропорциональный $(1-2b)$, исчезает и формула (58) предельно упрощается:

$$\sin \chi_z = 1 - a_z / a_0 = z / (1 + z), \quad (60)$$

что далее ведёт к линейному росту z с расстоянием.

Видимая и абсолютная светимости l , L источников в отсутствие расширения были бы связаны с фотометрическим расстоянием $d_p = a \sin \chi$ как $l = L / 4\pi d_p^2$. Через видимую и абсолютную звёздные величины m , M они выражаются как $l = 10^{-m/2.5} \cdot 2.52 \cdot 10^{-5}$ эрг/см²сек и $L = 10^{-M/2.5} \cdot 3.02 \cdot 10^{35}$ эрг/сек.

Расширение ведёт к уменьшению энергии и частоты прибытия фотонов на величину $1+z$:

$$l_F = \frac{L}{4\pi a_0^2 \sin^2 \chi_z} \cdot \frac{1}{(1+z)^2}. \quad (61)$$

Фотометрическое расстояние $d_{p,0}$, таким образом, равно:

$$d_{p,0} = a_0 \sin \chi \cdot (1+z) = 10^{-5+(m-M)/5} \text{ Mpc}, \quad (62)$$

откуда для модуля расстояния $\mu \equiv m-M = 5 \lg(d_{p,0}) + 25$ следует выражение:

$$\mu = 5 \lg[a_0(1+z) \cdot \sin \chi] + 25. \quad (63)$$

Подстановка (59) в (58), с учётом (63), даёт окончательное соотношение «светимость – красное смещение» фридмановской модели ($c \neq 1$):

$$\mu = 5 \lg \left\{ 2(1-b) \left[z - (1-2b)(\sqrt{1+z/(1-b)} - 1) \right] \right\} + A, \quad (64)$$

$$A = 5 \lg[a_0 / (b^{-1} - 1)^{1/2}] + 25 = 5 \lg(c / H_{obs}) + 25. \quad (65)$$

Это - стандартная формула Маттига, которая ранее записывалась через «параметр замедления» $q_0 = 1/2(1-b)$. Она не согласуется с наблюдениями уже при $z > 0.5$ (см. раздел 3).

Литература

1. Einstein A. (1917) *Sitz. Preus. Akad. Wiss.* **1**, 142.
2. Friedmann A. (1922) *Zs. Phys.* **11**, 377.
3. Lemaitre G. (1927) *Ann. Soc. Sci. Brux.*, **47A**, 49.
4. Hubble E. (1929) *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (3), 168.
5. Milne E. A. (1934) *Quart. J. Math. Oxf.* **5**, 64.
6. Riess A. G. et al. (1998) *Astron. J.* **116**, 1009;
7. Perlmutter S. et al. (1999) *Astrophys. J.* **517**, 565.
8. Закир З. (2013) *Теор. физ., астрофиз. и космол.* **8**(1), 1; **8**(1), 8.
9. Park C.-G. (2007) [arXiv:0710.1700](https://arxiv.org/abs/0710.1700).
10. Suzuki N. et al. (2012) *Astrophys. J.* **746**, 85.
11. Rodney, S. A., et al. (2012) *Astrophys J.*, **746**, 1, 5.
12. Rubin D. et al. (2013) *Astrophys J.*, **763**, 1, 35, 10 pp.
13. Jones D. O., et al. (2013) [arXiv:1304.0768](https://arxiv.org/abs/1304.0768) [astro-ph.CO].
14. Pruzhinskaya M. V. et al. (2011) *Astr. L.* **37**, 663.
15. Закир З. (2013) *Теор. физ., астрофиз. и космол.* **8**(2), 39.