Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **6**, N 2, с. 32 – 49, в1, 5 сентября 2011

Электрон.: ТФАК: 3900-022 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.3900-022

Вращательное квантование зарядово-симметричных систем. 2. Гармонические и магнито-гармонические роторы.

Захид Закир [1]

Аннотация

Для мягких ротаторов определяющим свойством является отсутствие радиальной скорости и оно позволяет упростить квантование гармонического и магнито-гармоническоого ротаторов. Операторы наблюдаемых последних нормально-упорядочены из-за симметрий системы, спектр энергий линеен по частоте и эквидистантен, а в основном состоянии нет нулевой энергии от вращательных мод. Это находится в согласии с обобщением соотношений неопределённостей для систем с неэрмитовыми каноническими переменными, где ограничения на флуктуации зависят от заряда состояния. Применения нового формализма к квантованию волн при коллективных вращениях одномерной цепочки гармонических ротаторов позволяет моделировать поля с зарядовой и калибровочной симметриями. Для вращательных мод имеет место кроссинг-симметрия между состояниями с разными направлениями вращения, а возникающие отрицательно-частотные моды есть положительно-частотные состояния антиквантов (античастиц) с переставленными начальными и конечными состояниями. Выведены коммутаторы и причинные корреляторы (пропагаторы) обобщённых координат гармонического ротатора.

PACS: 03.65.Ge, 11.30.Er, 1130.Ly, 11.90.+t
Ключевые слова: дискретные симметрии, вращения, зарядовая симметрия, уровни Ландау, цепочки ротаторов, пропагаторы

Содержание

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики*, *Ташкент*, *Узбекистан*, zahidzakir@theor-phys.org

Введение

Периодические процессы в системах с гармоническими потенциалами обычно принято сводить к набору гармонических осцилляторов, квантование колебаний в которых затем даёт эквидистантный спектр с нулевой энергией (*колебательное квантование*).

Если же периодичность в таких системах чисто вращательной природы, то здесь меняется физический смысл наблюдаемых и появляются новые нетривиальные свойства. В частности, в модели гармонического ротатора - одной частицы в гармоническом потенциале на плоскости без радиальных мод - частоты есть угловые скорости вращения и здесь нет нулевой энергии от вращательной моды [1]. Далее подход, где квантуются чисто вращательные моды систем, будем называть *вращательным квантованием*.

В предыдущей статье [2] рассматривалась система из *двух* зарядово-сопряжённых частиц (частица и её античастица), когда каждая из частиц совершает линейные колебания. Условия зарядовой симметрии при этом привели к спектру без нулевой энергии и этот необычный факт также оказался связанным с вращательной симметрией, но в комплексной плоскости двух степеней свободы.

Для прояснения физических причин отсутствия нулевой энергии в системах с чисто вращательными степенями свободы в данной статье вернёмся к системе из *одной* частицы с двумя степенями свободы, совершающей чистые вращения в гармоническом потенциале и более детально рассмотрим гармонические ротаторы и их цепочки.

Отличия вращательных мод от колебательных приводят к существенным отличиям физических свойств систем. Во-первых, частота теперь означает угловую скорость вращений и поэтому состояния на плоскости вращения двукратно вырождены. Во-вторых, угловой момент сохраняется и естественным образом квантуется даже в классической теории, выражая число оборотов, на которые отличаются состояния при поворотах на одинаковый конечный угол за одинаковое время. В-третьих, квантование энергии становится следствием квантования углового момента и, в-четвёртых, нет нулевой энергии от чисто вращательных мод.

Поэтому когда вращательные моды в двумерной системе сводятся к набору гармонических ротаторов, спектр энергий будет также эквидистантным и при этом уровни энергии линейно зависят от частоты и углового момента [1]. В общем случае нулевая энергия от *колебательных* мод присутствует, но в некоторых случаях она может быть компенсирована или не возникает вовсе. В частности, компенсируется при спиновом расщеплении основного уровня, а не возникает при наложении связи на радиальный импульс или из-за новых симметрий системы и во всех этих случаях спектр энергий начинается с нуля. Такие системы вообще без радиальных осцилляций будем называть *гармоническими ротаторами*, примером которых является *магнито-гармонический* ротатор.

В статье рассматриваются случаи гармонических ротаторов с точной и спонтанно-нарушенной зарядовой симметриями. Показывается, что при точной зарядовой симметрии нулевая энергия не возникает [2-3]. Модели гармонического ротатора с нулевой энергией колебательных мод тогда соответствуют спонтанно-нарушенной зарядовой симметрии, когда гамильтониан зарядово-симметричен, а основное состояние нет.

В цепочке гармонических ротаторов коллективные вращения вокруг общей оси при малом возмущении приводят к поперечным волнам, которые и квантуются, приводя к квазичастицам и дыркам, переносящим угловой момент. Группой симметрии при этом становится не $O(2)$, как у изолированного ротатора, а группа $SU(2)$. Это связано с тем, что цепочка ротаторов переходит в себя не при повороте отдельного ротатора на 2π, как у изолированного ротатора, а при его повороте на 4π, когда удаётся распутать цепочку при фиксированных внешних связях. В результате, в цепочке естественно возникают кванты в спинорном представлении группы вращений.

При включении взаимодействий квантов гармонического ротатора по теории возмущений операторы наблюдаемых в гамильтонианах и токах автоматически нормально упорядочены. Поэтому нормальное упорядочение и есть часть рецепта перехода от осцилляторного к вращательному квантованию.

В разделе статьи 1 приведено квантование гармонических ротаторов трёх типов. В разделе 2 проведено квантование зарядово-симметричных гармонических ротаторов и в разделе 3 формализм применён для квантования (поперечных) волн вращений в цепочке гармонических ротаторов. В разделе 4 рассмотрены кроссинг-симметрия состояний и получены корреляторы. Обозначения как в статье [1].

1. Квантование гармонических ротаторов

1.1. Круговой осциллятор как вибрирующий гармонический ротатор

Квантование движения частицы на плоскости в гармоническом потенциале принято называть задачей о *круговом осцилляторе*, где присутствуют как колебательные, так и вращательные моды. Когда угловой момент отличен от нуля $M \neq 0$, частица не проходит через центр из-за быстрого роста центробежной энергии и фактически система ведёт себя как *мягкий ротатор*. Поэтому далее системы с $M \neq 0$ будем называть *вибрирующими гармоническими ротаторами*.

Стандартное решение этой задача основано на построении гамильтониана и решении волнового уравнения. Здесь же приведём лагранжевую формулировку задачи и далее будем явно выделять вклады вращательных мод.

Лагранжиан вибрирующего гармонического ротатора в полярных координатах на плоскости вращения имеет вид:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + r^2\frac{m}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \omega^2\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Угол θ здесь циклическая переменная и поэтому угловой момент M сохраняется.

При нулевом собственном значении момента $M = 0$ происходят чистые колебания вдоль радиуса, когда частица обязательно проходит через центр и которые можно представить как суперпозицию двух *линейных осцилляторов*. Но при ненулевом моменте $M \neq 0$, когда частица не проходит через центр, радиусы уровней определяются равновесием центробежной и упругой сил – свойствами, которые отсутствуют у независимых линейных осцилляторов.

Гамильтониан, соответствующий (1), имеет вид

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{p_r^2}{2m} + U(r) \tag{2}$$

и содержит кинетическую энергию колебаний с импульсом p_r, а центробежная энергия включается в эффективную потенциальную энергию $U(r)$:

$$U(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \tag{3}$$

Минимумы полной энергии для разных угловых моментов соответствуют отсутствию радиальных возбуждений и минимумам $U(r)$. Последние же определяются значениями радиуса r_{eq}, когда центробежная и упругая сила уравновешены:

$$U'(r) = -\frac{M^2}{mr_{eq}^3} + m\omega^2 r_{eq} = 0, \qquad r_{eq}^2 = \frac{|M|}{m\omega}. \tag{4}$$

При этом, радиальные колебания происходят именно вокруг этих значений радиуса. Значения полной энергии при таком равновесии равны:

$$E_{eq} = |M|\omega. \tag{5}$$

Из (2) видно, что при $M = 0$ система сводится к двум линейным осцилляторам со спектром $E_{n_r,0} = \hbar\omega\left(2n_r + 1\right)$. Отсюда и из (5) следует, что даже в отсутствие радиальных возбуждений $n_r = 0$ от них всё равно остаётся нулевая энергия, а вклад вращательных мод с учётом квантования углового момента на плоскости $M_n = n_\theta\hbar$, где $n_\theta = 0, \pm1, \dots,$ сводится к $\hbar\omega|n_\theta|$. Таким образом, для энергии вращательных мод с добавлением энергии нулевых радиальных колебаний получаем:

$$E_{0,n_\theta} = \hbar\omega\left(|n_\theta| + 1\right). \tag{6}$$

В результате, спектр энергий вибрирующего гармонического ротатора в общем случае приобретает вид:

$$E_n = \hbar\omega\left(|n_\theta| + 2n_r + 1\right) = \hbar\omega\left(|Q| + 2n_r\right), \tag{7}$$

где $|Q| = |M| + 1 = |n_\theta| + 1$ - эффективный «заряд» состояния. Решение уравнения Шредингера с (2) даёт тот же спектр.

Введя отклонения от равновесных радиусов $\rho = r - r_{n_\theta}$ и соответствующие им радиальные импульсы осцилляций p_ρ, гамильтониан (2) можем записать в виде:

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{n_\theta^2\hbar^2}{2m(r_{n_\theta} + \rho)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(r_{n_\theta} + \rho)^2. \tag{8}$$

Как видим, график зависимости *энергия – радиус* имеет вид круговых желобов с минимумами при чисто вращательных значениях энергии (6). Это означает, что здесь мы имеем дело с системой со «спонтанно нарушенной» симметрией, когда колебательные уровни разделены на классы с определённым квантовым числом момента n_θ. Основные состояния этих классов сдвинуты на значения радиуса r_{n_θ}, а минимумы энергий подняты на значения E_{n_θ} из (6).

Эта ситуация противоположна картине молекулярных спектров, где разница колебательных уровней намного больше вращательных и последние стартуют с определённого колебательного уровня, образуя «вращательные полосы» между двумя колебательными уровнями. В вибрирующем гармоническом ротаторе же каждый вращательный уровень с $M_{n_\theta} = const.$ есть новое основное состояние (желоб), из которого стартует лестница колебательных уровней с нулевой энергией.

1.2. Гармонический ротатор

В тех случаях, когда вращательная энергия намного больше радиальной кинетической энергии, свойства вибрирующего гармонического ротатора определяются в основном вращательными модами. Поэтому представляет интерес изучить их в чистом виде, *полностью* пренебрегая радиальной кинетической энергией. Такие идеализированные системы с чисто вращательным кинетическим членом будем называть *идеальными гармоническими ротаторами* или просто *гармоническими ротаторами*.

Лагранжиан гармонического ротатора содержит чисто вращательный кинетический член (как и жёсткий ротатор), а также упругий потенциал (как и гармонический осциллятор) [1]:

$$L = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 = r^2 \frac{m}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \omega^2\right). \tag{9}$$

В этот лагранжиан r^2 входит однородно и его можно вывести за скобку как множитель Лагранжа $\lambda = r^2$. Это означает, что r не есть динамическая переменная и для него импульс не вводится. Лагранжиан (9) превратился в чистую связь $L = \lambda \varphi\left(\dot{\theta}\right)$ и разрешение этой связи даёт независимость угловой скорости (частоты вращения) от радиуса $\dot{\theta} = \omega_\pm = \pm\omega$. Цикличность угловой координаты далее ведёт к сохранению углового момента $M_\pm = m\omega_\pm r^2$, что позволяет выразить радиусы через угловые моменты: $r^2 = M_\pm / m\omega_\pm$.

Гамильтониан, следующий из лагранжиана (9):

$$H = p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \tag{10}$$

на поверхности связей $\varphi\left(\dot{\theta}\right) \approx 0$ имеет очень простой вид:

$$H_{\dot{\theta}=\omega_\pm} = M_+ \omega_+ + M_- \omega_-. \tag{11}$$

Каноническое квантование с введением радиального импульса p_r и первичной связи для него $\varphi_1 = p_r \approx 0$, ведёт к тем же результатам, что и приведённый простой способ, где использовано свойство r как лагранжева множителя [1]. Собственные значения углового момента $M_n = n_\theta \hbar$ сразу же дают спектр энергий чисто вращательных уровней:

$$E_n = \hbar\omega \left|n_\theta\right|. \tag{12}$$

Принятие модельного лагранжиана (9) есть идеализация, предполагающая возможность пренебречь радиальными осцилляциями. Это упрощение неправомерно для систем, содержащих нулевую энергию от радиальных мод. Здесь же важен тот факт, что сами вращательные уровни не дают вклада в нулевую энергию. Поэтому если в какой-то реальной системе с вращениями наблюдения не обнаружат нулевую энергию, то это будет означать, что в этой системе реализуются чисто вращательные моды без примеси радиальных мод.

Итак, при сравнении спектра энергий гармонического ротатора со спектром энергий гармонического осциллятора имеются три общих свойства: 1) частоты всех уровней *одинаковы*, 2) график зависимости энергии от растяжения есть *парабола* и 3) уровни энергии *эквидистантны*. Новыми свойствами же гармонического ротатора являются то, что его уровни энергии: 1) двукратно *вырождены*, 2) *пропорциональны* угловому моменту M, 3) *не содержат нулевой энергии*, и 4) квантованы из-за квантованности момента.

Эти свойства гармонического ротатора характерны для многих систем с комплексными каноническими переменными, в частности, релятивистских полей, и поэтому их естественно квантовать по аналогии именно с данной простой моделью.

1.3. Вибрирующий магнито-гармонический ротатор

Пример реального вибрирующего гармонического ротатора представляет собой движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле H_z. Движение в таком поле в классическом пределе происходит по круговым орбитам на плоскости x, y с циклотронной частотой $\omega_H = eH_z / mc \equiv 2\omega_\pm = \pm 2\omega$ и радиусом $r_H = v_\perp / \omega_H$. Здесь знак $\omega_\pm$ определяется знаком произведения eH_z и поэтому при одновременном изменении знаков заряда и магнитного поля (зарядовое сопряжение) частота не изменится, что и является выражением *зарядовой симметрии* системы.

Магнитное поле действует, во-первых, как упругая сила притяжения и поэтому система ведёт себя аналогично вибрирующему гармоническому ротатору. Во-вторых, частота обращения по кругу вдвое больше, чем частота ротатора с тем же потенциалом, так что равновесный радиус соответственно в $\sqrt{2}$ раза меньше, чем у гармонического ротатора с тем же моментом. В-третьих поле ведёт к дополнительным магнитным и спиновым расщеплениям уровней. Учитывая все эти схожести и различия далее такую систему будем называть *вибрирующим магнито-гармоническим ротатором* (см.[1]).

Стандартное рассмотрение магнито-гармонического ротатора основано на гамильтоновой формулировке, но чтобы явно показать родство с гармоническим ротатором, дадим также и лагранжевую формулировку задачи. Лагранжиан заряда в постоянном однородном магнитном поле (пока без учёта спина)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{e}{c}\mathbf{Av}, \tag{13}$$

при выборе вектор-потенциала в виде $\mathbf{A} = \mathbf{H} \times \mathbf{r} / 2$ переходит в

$$L = \left[\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + m\omega_\pm\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right)\right] + \frac{m}{2}\dot{z}^2 = L_\perp + \frac{m}{2}\dot{z}^2. \tag{14}$$

Симметрии системы проявляются в цилиндрических координатах, где в (14) лагранжиан на плоскости вращения $L_\perp$ приобретает вид:

$$\begin{aligned} L_\perp &= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + (\dot{\theta} + \omega_\pm)^2 r^2\right] - \frac{m\omega^2}{2} r^2 = \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + r^2 \frac{m}{2}\left[(\dot{\theta} + \omega_\pm)^2 - \omega^2\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Как видим, этот лагранжиан аналогичен лагранжиану вибрирующего гармонического ротатора (1) и отличается лишь сдвигом угловой скорости $\dot{\theta} \to \dot{\theta} + \omega_{\pm}$. Обобщённые импульсы

$$p_r = m\dot{r},\ \ P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2(\dot{\theta} + \omega_{\pm}) \tag{16}$$

позволяют выразить через них скорости:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m},\ \ \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2} - \omega_{\pm} \tag{17}$$

и гамильтониан:

$$H_\perp = p_r\dot{r} + P_\theta\dot{\theta} - L_\perp = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2}{2}r^2 - P_\theta\omega_{\pm}. \tag{18}$$

При квантовании радиальные колебания формально дают вклад в энергию $\hbar\omega(2n_r + 1)$. Но, движения на плоскости вращения симметричны относительно обеих осей и в классической картине происходят *только* по круговым орбитам. В квантовой картине это означает, что надо положить $n_r = 0$. Энергия же нулевых радиальных колебаний заряда при этом остаётся, но трансформируется магнитным полем в энергию «нулевых вращений» по дугообразным путям и наинизший уровень на плоскости вращения с $n_\theta = 0$ сводится к $E_0 = \hbar\omega = \hbar\omega_H / 2$. Далее, из (15) для вращательных мод следуют:

$$\dot{\theta} = -2\omega_{\pm},\quad P_\theta = -mr^2\omega_{\pm}. \tag{19}$$

В результате, учитывая, что $P_\theta = -i\hbar\partial/\partial\theta \to n_\theta\hbar$, уровни энергии на плоскости вращения приобретают вид:

$$E_{n_\theta\pm} = \hbar\omega\left(2|n_\theta| + 1\right) = \hbar\omega_H\left(|n_\theta| + 1/2\right). \tag{20}$$

При учёте спина фермиона s основной уровень расщепляется на два подуровня:

$$E_{0,s} = \hbar\omega_H\left(s + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \hbar\omega_H,\ s = 1/2 \\ 0,\quad s = -1/2 \end{cases}. \tag{21}$$

В результате, для частицы с $s = \pm 1/2$ *наинизшая энергия сдвигается к нулю* $E_{0,-1/2} = 0$, а следующий уровень $E_{0,-1/2} = \hbar\omega_H$ и все последующие уровни оказываются двукратно вырожденными:

$$E_{n_\theta\pm} = \hbar\omega_H\left(|n_\theta| + s + 1/2\right) = \begin{cases} \hbar\omega_H\left(|n_\theta| + 1\right),\ s = 1/2 \\ \hbar\omega_H|n_\theta|,\qquad s = -1/2 \end{cases}. \tag{22}$$

Радиусы этих орбит остаются прежними и одинаковыми, сдвигаются только их энергии. Переходы между ними происходят при излучении или поглощении фотона с переворотом спина состояния.

Таким образом, расщепление уровней из-за взаимодействия магнитного поля с магнитным моментом $M\omega_H / 2$, возникшим из-за движения по круговой орбите, для данного знака заряда уменьшает число состояний вдвое, *исключив вклад состояний с обратным направлением вращения*. Расщепление же уровней из-за взаимодействия магнитного поля со спином частицы $-\mu(\mathbf{sH}) = s\omega_H$ сдвигает к нулю наименьшую энергию электрона с ориентацией спина против направления поля: $E_{0,-1/2} = 0$. В результате в этом частном случае реализуется уникальная ситуация, когда полная энергия системы равна чисто вращательной энергии.

1.4. Магнито-гармонический ротатор

Уравнения движения заряда в однородном магнитном поле H_z в классическом пределе зануляют радиальную скорость на плоскости вращения (магнито-гармонический ротатор). В точном решении квантовой задачи спектр энергий также содержит только вклад вращательных уровней, сдвинутых лишь на нулевую энергию от радиальных осцилляций.

Но, нулевая энергия от колебательных мод может быть компенсирована энергией спинового расщепления и тогда спектр энергий начинается с нуля (см. раздел 1.2). Такой спектр аналогичен спектру гармонического ротатора и для того, чтобы эта аналогия была точной, рассмотрим модель *идеального магнито-гармонического ротатора*, или просто *магнито-гармонического ротатора* в котором нулевая энергия изначально отсутствует из-за полного исключения радиальных мод. При этом вопрос о том, в каких системах может реализоваться такой режим, на данном этапе пока не существенен.

В связи с этим очевидно, что простота и наглядность процедуры квантования гармонического ротатора должна быть присуща и для данной системы. При этом радиальная скорость исключается не постфактум уравнениями движения, а явным образом либо опусканием радиальной кинетической энергии в лагранжиане, когда r становится лагранжевым множителем, либо введением связи.

Начнём с первого и простейшего способа, когда вместо лагранжиана (15) введём такой же, но без радиального кинетического члена и где кинетическая энергия на плоскости вращения целиком сводится к энергии вращений:

$$L_\perp = r^2 \frac{m}{2}\left[(\dot\theta + \omega_\pm)^2 - \omega_\pm^2\right] = r^2 \frac{m}{2}(\dot\theta + 2\omega_\pm)\dot\theta. \tag{23}$$

В этот лагранжиан r^2 входит однородно и есть множитель Лагранжа $\lambda = r^2$, так что теперь r не есть динамическая переменная и для него импульс не вводится.

Лагранжиан (23) есть чистая связь $L_\perp = \lambda\varphi(\dot\theta)$, где $\varphi = m(\dot\theta + 2\omega_\pm)\dot\theta/2$, и разрешение этой связи даёт независимость угловой скорости (частоты вращения) от радиуса $\dot\theta = -2\omega_\pm$. Из выражения для обобщённого импульса (16) и квантования углового момента затем следуют:

$$\begin{gathered} P_\theta = mr_{n_\theta}^2(\dot\theta + \omega_\pm) = -mr_{n_\theta}^2\omega_\pm = n_\theta\hbar, \\ r_{n_\theta}^2 = -\frac{P_\theta}{m\omega_\pm} = -\frac{n_\theta\hbar}{m\omega_\pm}, \qquad \frac{n_\theta}{\omega_\pm} \le 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Гамильтониан, следующий из лагранжиана (23)

$$\begin{aligned} H_\perp &= P_\theta\left(\frac{P_\theta}{mr^2} - \omega_\pm\right) - r^2\frac{m}{2}\left[\left(\frac{P_\theta}{mr^2}\right)^2 - \omega_\pm^2\right] = \\ &= \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{m\omega_\pm^2}{2}r^2 - P_\theta\omega_\pm \end{aligned} \tag{25}$$

на поверхности связи

$$\varphi = \frac{P_\theta}{2r^2}\left(\frac{P_\theta}{mr^2} + \omega_\pm\right) \approx 0 \qquad (26)$$

приобретает очень простой вид:

$$H_\perp = P_\theta\left(\frac{P_\theta}{mr^2} - \omega_\pm\right) = -2\omega_\pm P_\theta. \qquad (27)$$

Соответствующие возбуждённые уровни энергии на плоскости вращения есть:

$$E_{n_\theta} = 2\hbar\omega\left|n_\theta\right| = \hbar\omega_H\left|n_\theta\right| \qquad (28)$$

и отличаются от (20) лишь отсутствием радиальной нулевой энергии $E_0 = \hbar\omega_H / 2$.

Каноническое квантование с введением радиального импульса p_r и связи $\varphi_1 = p_r \approx 0$ даёт те же результаты, что и данный простой способ с использованием свойства r как лагранжева множителя. Действительно, введём обобщённый гамильтониан магнито-гармонического ротатора $\tilde{H}_\perp$, который содержит гамильтониан вибрирующего гармонического ротатора (18) и первичную связь $\varphi_1 = p_r$:

$$\tilde{H}_\perp = H_\perp + \lambda_1\varphi_1, \qquad (29)$$

$$H_\perp = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{m}{2}\omega^2 r^2 - P_\theta\omega_\pm. \qquad (30)$$

Условие сохранения связи выполняется на поверхности связи:

$$\left[\tilde{H}_\perp, \varphi_1\right] = \left[H_\perp, \varphi_1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{P_\theta^2}{mr^2} + m\omega^2 r^2, p_r\right] = -\frac{P_\theta^2}{mr^3} + m\omega^2 r \approx 0 \qquad (31)$$

и новых связей не возникает. Для большей симметричности можно ввести связь $\varphi_1 = p_r^2$ и результат будет таким же. На поверхности связи гамильтониан $H_\perp$ из (30) переходит в (25) и даёт тот же спектр (28), что и при упрощённом, а также стандартном решениях задачи.

2. Дискретные симметрии ротаторов и их следствия

2.1. Гармонические ротаторы с зарядовой симметрией в комплексных переменных

В классических вращающихся системах естественно ввести на плоскости вращения полярные координаты с угловой переменной $\theta(t)$. Однако, при квантовании эта переменная приводит к известному парадоксу (см. [3]): если θ считать оператором, то в представлении, в котором угловой момент диагонален, получим:

$$\left(M - M'\right)\left\langle M\right|\theta\left|M'\right\rangle = -i\delta_{MM'}, \qquad (32)$$

что не выполняется при $M = M'$. Этот парадокс вызван тем, что θ не однозначная переменная и не является наблюдаемой в обычном смысле. Но, как известно, парадокс исчезает, если вместо θ пользоваться комплексным оператором сдвига $\xi = \exp(i\theta)$. Тогда вместо (32) получаем:

$$\left(M - M'\right)\left\langle M\right|\xi\left|M'\right\rangle = \left\langle M\right|\xi\left|M'\right\rangle, \qquad (33)$$

где видно, что матричный элемент отличен от нуля только для переходов $M - M' = 1$.

Переход же от θ к $\xi = (x+iy)/r$ фактически есть переход к комплексной координате. В связи с этим рассмотрим формулировку гармонических ротаторов в терминах комплексных переменных, которая не только более последовательна, но и позволяет продвинуться ещё ближе к задаче квантования релятивистских полей.

В классической системе с двумя вещественными обобщёнными координатами x, y и с гармоническим потенциалом введём эрмитово-сопряжённые обобщённые координаты:

$$q = \left(x+iy\right)/\sqrt{2}, \qquad q^* = \left(x-iy\right)/\sqrt{2} \tag{34}$$

и лагранжиан такой системы имеет вид:

$$L = m\partial_t q^* \cdot \partial_t q - m\omega^2 q^* q \tag{35}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно фазовых преобразований

$$q' = e^{i\alpha Q} q, \quad q'^* = q^* e^{-i\alpha Q} \tag{36}$$

с постоянным параметром α и сохраняющимся «зарядом» $\partial_t Q = 0$, где

$$Q = i(q^* p^* - pq). \tag{37}$$

Состояния системы образуют две группы взаимно «зарядово-сопряжённых» состояний.

Для чисто вращательных мод системы в режиме гармонического ротатора радиальный импульс исчезает. Но так как в комплексной записи радиальный импульс явно не выделяется, то для отделения вращательных мод от колебательных требуются косвенные подходы.

Состояния системы разделяются на две группы, которые отличаются знаком заряда $Q = \pm 1$ и переходят друг в друга при зарядовом сопряжении: $q_c = CqC^{-1}$. Лагранжиан, гамильтониан и оператор «заряда» такой расширенной системы имеют вид:

$$L = \frac{1}{2}\Big[m\Big(\partial_t q^* \cdot \partial_t q - \omega^2 q^* q\Big) + m\Big(\partial_t q_c^* \cdot \partial_t q_c - m\omega^2 q_c^* q_c\Big)\Big], \tag{38}$$

$$H = \frac{1}{2}\Big(\tilde{H} + \tilde{H}_c\Big) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\Big(pp^* + m^2\omega^2 q^* q\Big) + \frac{1}{m}\Big(p_c p_c^* + m^2\omega^2 q_c^* q_c\Big)\right], \tag{39}$$

$$Q = \frac{1}{2}\Big(\tilde{Q} + \tilde{Q}_c\Big) = \frac{1}{2}\Big[i\Big(q^* p^* - pq\Big) + i\Big(q_c^* p_c^* - p_c q_c\Big)\Big]. \tag{40}$$

Поскольку система из двух идеальных гармонических ротаторов не содержит нулевой энергии, то в таком представлении она формально тождественна рассмотренной в предыдущей статье [2] системе в гармоническом потенциале с точной зарядовой симметрией (из частицы и античастицы). Поэтому далее можем не вводить явную связь в гамильтониан (39), исключающей радиальную моду, и только ввести требование о точной зарядовой симметрии, легко формулируемое в комплексных переменных.

Как и в [2], тогда операторы наблюдаемых связаны с билинейными произведениями $a^* a$ и $b^* b$ взаимно зарядово-сопряжённых операторов, дающими ноль при действии на основное состояние («сильное» нормальное упорядочение), соотношениями:

$$a^* a = \frac{1}{2} i\Big(q^* p^* - pq\Big) + \frac{1}{2m\omega}\Big(pp^* + m^2\omega^2 q^* q\Big) = \frac{1}{2}\left(Q + \frac{1}{\omega}H\right) = \tilde{Q}. \tag{41}$$

$$b^*b = \frac{1}{2}i\left(q_c^* p_c^* - p_c q_c\right) + \frac{1}{2m\omega}\left(p_c p_c^* + m^2\omega^2 q_c^* q_c\right) = \frac{1}{2}\left(Q_c + \frac{1}{\omega}H_c\right) = \tilde{Q}_c. \quad (42)$$

где $\tilde{Q}, \tilde{H}$ - «заряд» и гамильтониан состояний с определённым зарядом. В результате полные «заряд» и гамильтониан состояний приобретают стандартный вид:

$$Q = \tilde{Q} + \tilde{Q}_c = a^*a - b^*b, \quad (43)$$

$$H = \omega(\tilde{Q} - \tilde{Q}_c) = \omega(a^*a + b^*b). \quad (44)$$

Здесь нет «нулевого заряда» и «нулевой энергии», что представляет интерес при применении этого формализма для релятивистских полей.

2.2. Магнито-гармонические ротаторы с зарядовой симметрией в комплексных переменных

В случае магнито-гармонического ротатора в комплексных переменных на плоскости вращения имеются два вида лагранжианов, каждый из которых в классическом случае переходит в лагранжиан (14) и поэтому интуитивно считались эквивалентными:

$$L_0 = m\dot{q}^*\dot{q} - m\omega \cdot i\left(q^*\dot{q} - \dot{q}^*q\right), \quad (45)$$

$$L_\perp = \frac{1}{2}m\left(\dot{q}^*\dot{q} + \dot{q}\dot{q}^*\right) - m\omega \cdot i\left(q^*\dot{q} - \dot{q}^*q\right). \quad (46)$$

Но, как известно, в квантовой теории они различаются, так как скорости в этой системе не коммутируют. Обобщённые импульсы

$$p = m\dot{q}^* - im\omega q^*, \quad p^* = m\dot{q} + im\omega q \quad (47)$$

позволяют выразить через них скорости:

$$\dot{q} = \frac{1}{m}p^* - i\omega q, \quad \dot{q}^* = \frac{1}{m}p + i\omega q^*, \quad (48)$$

и из-за присутствия в (48) как импульсов, так и координат, коммутатор скоростей равен:

$$\left[\dot{q}, \dot{q}^*\right] = \frac{2\omega}{m}. \quad (49)$$

С учётом этого обстоятельства лагранжианы (45) и (46) можем записать в виде:

$$L_0 = m\left[\left(D_t q\right)^*\left(D_t q\right) - \omega^2 q^* q\right]. \quad (50)$$

$$L_\perp = m\left[\left(D_t q\right)^*\left(D_t q\right) - \omega^2 q^* q\right] - \omega, \quad (51)$$

где введена «удлинённая» производная по времени $D_t = \partial_t + i\omega$, которая позволяет представить обобщённые импульсы (47) в виде:

$$p^* = mD_t q, \quad p = m\left(D_t q\right)^*. \quad (52)$$

В отличие от скоростей (48), «удлинённые» скорости $D_t q$ и $(D_t q)^*$, которые есть импульсы с точностью до коэффициента (массы), коммутируют между собой.

Из лагранжианов (50) - (51) следуют гамильтонианы:

$$H_0 = \tilde{H} + \omega Q = \tilde{H} - \omega\left(M + 1\right), \quad (53)$$

$$H_\perp = \tilde{H} + \omega\left(Q + 1\right) = \tilde{H} - \omega M, \quad (54)$$

где $\tilde{H}$ есть гамильтониан вибрирующего гармонического ротатора:

$$\tilde{H} = \frac{1}{m}\left(pp^* + m^2\omega^2 q^* q \right). \tag{55}$$

Из (53) следует, что радиальная нулевая энергия в $\tilde{H}$ компенсируется и, так как в магнитном поле нет радиальных возбуждений, в полную энергию дают вклад лишь чисто вращательные моды гармонического ротатора:

$$H_0 = 2\omega\left(\left|n_\theta\right| - n_\theta\right) = \begin{cases} \omega_H \left|n_\theta\right|, & n_\theta < 0, \\ 0, & n_\theta > 0. \end{cases} \tag{56}$$

где $\omega_H = 2\omega$. Вместе со вторым, также чисто вращательным вкладом ωQ, они и образуют полный гамильтониан вибрирующего гармонического ротатора. Таким образом, как и в классической картине, движение происходит только по круговым орбитам, но без нулевой энергии.

Гамильтонианы (53) - (54) также могут быть записаны в виде:

$$H_0 = \frac{1}{m}\left(p + im\omega q^* \right)\left(p^* - im\omega q \right) = 2\omega a^* a = \omega_H Q, \tag{57}$$

$$H_\perp = \frac{1}{m}\left(p + im\omega q^* \right)\left(p^* - im\omega q \right) + \omega = 2\omega a^* a + \omega = \omega_H \left(Q + \frac{1}{2} \right), \tag{58}$$

Итак, «минимальный» лагранжиан L_0 ведёт к «минимальному» гамильтониану H_0 без нулевой энергии и поэтому такую систему можем называть *магнито-гармоническим ротатором*. Из симметризованного же лагранжиана $L_\perp$ следует симметризованный гамильтониан $H_\perp$ со стандартным спектром, содержащий нулевую энергию от радиальных нулевых флуктуаций $E_{(0)} = \omega_H / 2$ (трансформированных полем в хаотические движения по дугообразным путям).

При спиновом расщеплении основного уровня для частицы с $s = \pm 1/2$ наинизшая энергия $H_\perp$ также сдвигается к нулю $E_{0,-1/2} = 0$, а следующий уровень $E_{0,-1/2} = 2\omega = \omega_H$ и все последующие уровни даже при одинаковом направление вращения также двукратно вырождены по ориентации спина, а гамильтониан имеет вид:

$$H_\perp = \omega_H \left[a^+ a + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{59}$$

Состояния магнито-гармонического ротатора с Q определены так, что соответствуют вращениям частицы с положительными зарядом, частотой и энергией. Произведём теперь зарядовое сопряжение в системе, когда заряд вращающейся частицы становится отрицательным, но и *магнитное поле меняет свой знак*. При этом частота и энергия по прежнему остаются *положительными*, т.е. магнито-гармонический ротатор зарядово-симметричен. Это позволяет наблюдаемые зарядово-сопряжённого состояния с операторами b^+, b найти из наблюдаемых с операторами a^+, a и записать наблюдаемые системы в зарядово-симметричной форме:

$$Q = \tilde{Q} + \tilde{Q}^c = a^+ a - b^+ b, \tag{60}$$

$$H_0 = \omega_H Q = \omega_H \left(a^+ a + b^+ b\right). \tag{61}$$

Из сравнения с (57)-(58) тогда приходим к тем же соотношениям между операторами заряда, что и в случае гармонического ротатора.

С физической точки зрения двум знакам заряда частицы соответствуют два направления вращения магнито-гармонического ротатора с одинаковыми энергиями. Такое двукратное вырождение вращательных уровней порождает дискретную симметрию с сохраняющейся величиной – магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}_z$, пропорциональным заряду и угловому моменту вращающейся частицы:

$$\boldsymbol{\mu}_z = \frac{1}{2m} e \cdot \mathbf{M}_z. \tag{62}$$

Если изменить знак заряда частицы $e \to -e$, то изменится направление вращения в магнитном поле $\omega_+ \to \omega_- = -\omega$, что меняет знак углового момента и в итоге магнитный момент остаётся неизменным: $\mu_z \to \mu_z$. Энергия взаимодействия с магнитным полем принимает вид:

$$\boldsymbol{\mu}_z H_z = \frac{1}{2m} e \cdot \mathbf{M}_z H_z. \tag{63}$$

В случае простого гармонического ротатора введём киральный заряд Q, равный проекции углового момента кванта на нормаль к плоскости вращения $\mathbf{n}_z$:

$$Q_n = \mathbf{n}_z \cdot \mathbf{M}_n. \tag{64}$$

Знак углового момента определяется знаком частоты вращения, тогда как знак Q зависит и от знака ориентации относительно нормали к плоскости вращения. Киральный заряд магнито-гармонического ротатора, конечно, пропорционален обычному заряду вращающейся частицы.

В системах с зарядовой симметрией вместо углового момента фигурирует оператор заряда системы. Ключевая симметрия таких систем - это симметрия между зарядово-сопряжёнными состояниями одного и того же знака энергии. Как ранее было показано [2], эта симметрия естественным образом исключает нулевую энергию и нулевой заряд. Поэтому при квантовании такие системы сводятся не к совокупности гармонических осцилляторов, а к совокупности (идеальных) гармонических ротаторов.

3. Вращающиеся цепочки ротаторов и пропагаторы

3.1. Вращающиеся цепочки гармонических ротаторов

Спектр гармонического ротатора эквидистантен, вырожден и не содержит нулевой энергии, что имеет место и для квантованных релятивистских полей с калибровочными и зарядовыми симметриями. Так как поля аналогичны непрерывному пределу цепочек ротаторов, в [1] была кратко рассмотрена модель цепочки ротаторов. Здесь же будет приведена формулировка модели в терминах комплексных переменных.

Пусть имеется совокупность N одинаковых гармонических ротаторов, каждый из которых образован двумя упруго связанными и вращающимися на плоскостях (x, y, z_i), где $i = 1, \ldots, N$, частицами A и B и пусть центры инерции этих ротаторов расположены с шагом d вдоль общей оси вращения z. При одинаковой угловой скорости ω_0 и одинаковых начальных условиях вся совокупность ротаторов вращается когерентно и, из-за сохранения углового момента, каждый из них остаётся на своей плоскости вращения, а энергия системы равна:

$$E_N = N_+ M_+ \omega_{0+} + N_- M_- \omega_{0-} + E_0, \tag{65}$$

где $M_\pm$ - угловой момент одного ротатора.

Соединим теперь с помощью упругой силы $\kappa(r_{i+1} - r_i)$ каждую из двух частиц каждого из ротаторов с аналогичными частицами двух соседних ротаторов (A_i с $A_{i\pm 1}$ и B_i с $B_{i\pm 1}$), образовав двойную одномерную цепочку из $2N$ частиц. В непрерывном пределе эта двойная цепочка образует две массивные струны, соединённые эластичной плёнкой небольшой ширины. Частота вращения каждого из гармонических ротаторов $\omega_0 = \sqrt{\kappa / m}$ постоянна и связи с соседями её не меняют. Они лишь приводят к изменению углового момента при дополнительном растяжении на плоскости вращения, при этом из-за сохранения углового момента и слабости связей с соседями каждый ротатор остаётся на своей плоскости вращения.

Пусть теперь приложенная внешняя сила придаёт одному из ротаторов в цепочке дополнительный угловой момент и соответствующую энергию. Этот угловой момент будет передаваться по цепочке, а вся цепочка при этом по прежнему будет вращаться синхронно, только малый бугорок растяжения будет перемещаться по цепи. При периодическом возмущении в системе распространяется поперечная волна растяжений ротаторов и длина этой волны $\lambda = l'd$ определяется числом l' ротаторов, охваченных периодом волны, а соответствующий волновой вектор $\mathbf{k}_z = 2\pi \mathbf{n}_z / \lambda$ направлен вдоль оси z и задаёт импульс кванта волны. С $\mathbf{k}_z$ связана «продольная» частота распространения волны, определяемая как произведение k_z на скорость волны $\omega_z = v k_z$. Два гребня волны противоположных концов ротаторов на плоскости (x, y) вращаются с общей частотой вращений ω_0 и перемещаются вдоль z со скоростью v_z, а их пути в пространстве образуют две спиралевидные кривые вокруг оси z.

В квантовой теории, где каждый из ротаторов имеет квантованный угловой момент и соответствующий уровень энергии, прохождение волны состоит в переходе ротатора из своего уровня на соседний и обратно, так что речь идёт о распространении *квазичастиц* при добавлении углового момента и *дырок* при убавлении. Если к одному и тому же ротатору с одной стороны цепочки поступает квазичастица, а с другой стороны одновременно поступит дырка, то угловой момент не меняется, так что речь идёт о *рекомбинации* этих возмущений.

В системе не связанных друг с другом, но расположенных вдоль общей оси вращения и когерентно вращающихся ротаторов *вращательная симметрия* в пространстве двух степеней свободы (x_i, y_i) есть $O(2)$ с сохраняющимся угловым моментом. В комплексном пространстве (q_n^*, q_n) вращательной симметрии соответствует группа $U(1)$ с сохраняющимся зарядом.

Когда же ротаторы образуют упруго связанную цепочку, связи ротаторов друг с другом приводят к новому эффекту топологической природы - система переходит в себя не при повороте на 2π отдельного ротатора в цепочке, а при его повороте на 4π, так что группой симметрии при вращениях становится $SU(2)$. Причина в том, что при повороте на 4π одного из ротаторов цепочка может быть распутана (методом Дирака) и возвращена в состояние до поворота без изменения границ цепочки и без изменения ориентации повёрнутого ротатора. Таким образом, в цепочке связанных ротаторов естественным образом возникают кванты в спинорном представлении группы вращений.

3.2. Квантование зарядово-симметричной вращающейся цепочки ротаторов

Лагранжиан цепочки из связанных идеальных гармонических ротаторов можно записать в виде:

$$L=\sum_{n=1}^{N}\left[m\dot{q}_n^*\dot{q}_n-k\left(q_{n+1}^*-q_n^*\right)\left(q_{n+1}-q_n\right)-m\omega_0^2 q_n^* q_n\right] \tag{66}$$

Канонические импульсы

$$p_n=m\dot{q}_n^*,\quad p_n^*=m\dot{q}_n. \tag{67}$$

дают заряд и гамильтониан:

$$Q=i\sum_{n=1}^{N}\left(q_n^* p_n^*-p_n q_n\right), \tag{68}$$

$$H=\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{m}p_n^2 p_n^{*2}+\kappa\left(q_{n+1}^*-q_n^*\right)\left(q_{n+1}-q_n\right)^2+m\omega_0^2 q_n^* q_n\right]. \tag{69}$$

Уравнения движения, следующие из этого гамильтониана есть

$$\begin{aligned}\ddot{q}_n+\omega_0^2\left(2q_n-q_{n+1}-q_{n-1}\right)+\omega_0^2 q_n=0,\\ \ddot{q}_n^*+\omega_0^2\left(2q_n^*-q_{n+1}^*-q_{n-1}^*\right)+\omega_0^2 q_n^*=0.\end{aligned} \tag{70}$$

В непрерывном пределе они переходят в волновые уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}-\mathrm{v}^2\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}+\omega_0^2 q=0,\\ \frac{\partial^2 q^*}{\partial t^2}-\mathrm{v}^2\frac{\partial^2 q^*}{\partial r^2}+\omega_0^2 q^*=0.\end{aligned} \tag{71}$$

со скоростью распространения волны $\mathrm{v}=\omega_0 d$. Эти уравнения описывают поперечные волны вдоль двух струн, связанных узкой эластичной плёнкой и вращающихся.

В принципе можно ввести периодические граничные условия для достаточно большого числа ротаторов:

$$q_1(t)=q_{N+1}(t),\ q_1^*(t)=q_{N+1}^*(t). \tag{72}$$

Далее учтём, что есть и когерентное вращение всех ротаторов с общей частотой ω_0. Вращательная энергия каждого из ротаторов выражается через угловой момент, который теперь содержит также вклад частоты волны. При этом, вращения цепочки по-прежнему можно представить как набор независимых ротаторов (нормальных мод), но только с частотами ω_k, следующими, как и для цепочки осцилляторов, из волнового уравнения. Таким образом, волны на цепи ротаторов можно представить как ряд независимых нормальных мод с частотами ω_k, следующими из волновых уравнений (70):

$$\ddot{a}_k(t)+\omega_k^2 a_k(t)=0, \tag{73}$$

где

$$\begin{aligned}&\omega_k^2=\omega_0^2\left(2-e^{ikd}-e^{-ikd}\right)+\omega_0^2=\mathrm{v}^2k^2+\omega_0^2,\\&\mathrm{v}^2k^2=2\omega_0^2\left(1-\cos kd\right)\approx k^2\omega_0^2d^2.\end{aligned} \tag{74}$$

Всё это позволяет разложить обобщённые координаты по частотам этих волн:

$$\begin{aligned}&q_n(t)=\sum_k\frac{1}{\sqrt{2mN\omega_k}}\left(a_k e^{-i\omega_k t+iknd}+\beta_k^* e^{i\omega_k t-iknd}\right),\\&q_n^*(t)=\sum_k\frac{1}{\sqrt{2mN\omega_k}}\left(a_k^* e^{i\omega_k t-iknd}+\beta_k e^{-i\omega_k t+iknd}\right),\end{aligned} \tag{75}$$

($k=2\pi l'/Nd$, l' – целые числа). Это разложение соответствует случаю, когда при вращениях цепочки связанных ротаторов происходит распространение поперечных волн вдоль оси z с волновыми числами k и с частотами ω_k. Отметим, что длина волны в цепочке намного превышает расстояние между отдельными ротаторами. Угловой момент, энергия и импульс этих волн даются выражениями:

$$\begin{aligned}&Q=\sum_k Q_k=\sum_k\left(a_k^*a_k-\beta_k\beta_k^*\right),\\&H=\sum_k\omega_k\cdot Q_k=\sum_k\omega_k\left(a_k^*a_k+\beta_k\beta_k^*\right),\\&P=\sum_k k\left(a_k^*a_k+\beta_k\beta_k^*\right).\end{aligned} \tag{76}$$

Коммутационные соотношения для обобщённых координат и импульсов дают следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[a_k,a_{k'}^*]=\delta_{kk'},\quad [\beta_k,\beta_{k'}^*]=\delta_{kk'}. \tag{77}$$

В результате, угловой момент и гамильтониан нормальных мод приобретают вид:

$$\begin{aligned}&Q_k=a_k^*a_k-\beta_k\beta_k^*,\\&H_k=\omega_k\left(a_k^*a_k+\beta_k\beta_k^*\right).\end{aligned} \tag{78}$$

Вводя соответствующие *C*-сопряжённые лестничные операторы:

$$\begin{aligned}&b_k\equiv Ca_kC^{-1},\quad b_k^*\equiv Ca_k^*C^{-1},\\&\alpha_k\equiv C\beta_kC^{-1},\quad \alpha_k^*\equiv C\beta_k^*C^{-1},\end{aligned} \tag{79}$$

для *C*-сопряжённых наблюдаемых получаем выражения:

$$\begin{aligned}&Q^c=\sum_k Q_k^c=\sum_k\left(b_k^*b_k-\alpha_k\alpha_k^*\right),\\&H^c=\sum_k H_k^c=\sum_k\omega_k\left(b_k^*b_k+\alpha_k\alpha_k^*\right).\end{aligned} \tag{80}$$

Отличие вращений цепочки от одиночного ротатора с фиксированной частотой состоит в суммировании по модам с *разными* частотами. Поскольку моды с разными частотами *независимы* и каждая мода *C*-симметрична, то условия *C*-симметрии устанавливают связь между *C*-сопряжёнными операторами наблюдаемых в каждой моде:

$$Q_k^c = -Q_k\,,\quad H_k^c = H_k\,, \tag{81}$$

из которых по ранее показанной процедуре следуют соотношения:

$$Q_{-k} = -Q_k^c\,,\quad Q_{-k}^c = -Q_k\,, \tag{82}$$

или

$$\alpha_k\alpha_k^* = a_k^* a_k\,,\quad \beta_k\beta_k^* = b_k^* b_k\,. \tag{83}$$

Подставив их затем в (78) или (80), наблюдаемые выражаем в терминах операторов взаимно *C*-сопряжённых квантов:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_k Q_k = \sum_k \left(a_k^* a_k - b_k^* b_k\right),\\ H &= \sum_k H_k = \sum_k \omega_k \left(a_k^* a_k + b_k^* b_k\right),\\ P &= \sum_k P_k = \sum_k k\left(a_k^* a_k + b_k^* b_k\right). \end{aligned} \tag{84}$$

Таким образом, в одномерной цепочке идеальных гармонических ротаторов с *C*-симметрией нулевая энергия и нулевой угловой момент не возникают.

Перестановочная функция обобщённых координат гармонического ротатора сводится к *нечётному* решению уравнения движения ($f = 1/2m\omega$):

$$\begin{aligned} [q(t'), q^+(t)] &= f([a, a^+]e^{-i\omega(t'-t)} - [\beta, \beta^+]e^{i\omega(t'-t)}) = \\ &= f(e^{-i\omega(t'-t)} - e^{i\omega(t'-t)}) = -2if\,\sin[\omega(t'-t)]. \end{aligned} \tag{85}$$

Далее необходимо придерживаться причинного ограничения, что кванты с положительной энергией эволюционируют только вперёд во времени, а кванты с отрицательной энергией эволюционируют только назад во времени. При этом эволюция антикванта вперёд во времени описывается также как и обычного кванта, но с переставленными начальными и конечными состояниями. После исключения отрицательно-частотных состояний путём кроссинг-преобразования, в теории остаются лишь кванты и антикванты с положительной энергией, которые эволюционируют только вперёд во времени.

Перестановочная функция для цепочки ротаторов имеет вид ($\Delta t = t' - t$):

$$\begin{aligned} [q_{n'}(t'), q_n^+(t)] &= \frac{1}{m} D[\Delta t, (n'-n)d] \\ iD[\Delta t, (n'-n)d] &= \frac{1}{2N}\sum_k \frac{1}{\omega_k}(e^{-i\omega_k \Delta t} - e^{i\omega_k \Delta t})\, e^{ik(n-n')d}\,. \end{aligned} \tag{86}$$

Диагональные матричные элементы от произведений двух обобщённых координат с разными моментами времени $q^+(t)q(t')$ и $q(t')q^+(t)$ ведут к чётному причинному коррелятору [2]. Поэтому причинный пропагатор для квантов, распространяющихся вдоль цепочки ротаторов:

$$\begin{aligned} & iD_c[\Delta t, (n'-n)d] = \\ & = m\langle 0|q_{n'}(t')|1\rangle\langle 1|q_n^+(t)|0\rangle\theta(\Delta t) + \langle 0|q_{n'}(t)|1_c\rangle\langle 1_c|q_n^*(t')|0\rangle\theta(-\Delta t), \\ & iD_c[\Delta t, (n'-n)d] = \frac{1}{2N}\sum_k \frac{1}{\omega_k}[\theta(\Delta t)\, e^{-i\omega_k \Delta t} + \theta(-\Delta t)]e^{i\omega_k \Delta t}\, e^{ik(n-n')d}\,. \end{aligned} \tag{87}$$

также чётная функция временного интервала.

Заключение

Анализ применяемых на практике моделей мягких ротаторов позволяет сформулировать их общую теорию и, в частности, квантовую теорию гармонического ротатора. Операторы наблюдаемых нормально-упорядочены из-за симметрий системы и нет нулевой энергии в основном состоянии. Это находится в согласии с обобщением соотношений неопределённостей для таких систем, где ограничения на флуктуации зависят от значения заряда состояния.

Применения нового формализма к квантованию волн при коллективных вращениях одномерной цепочки гармонических ротаторов позволяет моделировать поля с калибровочной и С-симметриями, а также со спинорными возбуждениями. В системах с вращательными симметриями имеет место кроссинг-симметрия между состояниями с противоположными направлениями вращения, а возникающие отрицательно-частотные моды есть положительно-частотные состояния антиквантов (античастиц) с переставленными начальными и конечными состояниями.

В следующей статье будет развито вращательное квантование полей, где частота кванта означает частота вращения полевых векторов аналогично гармоническому ротатору. Здесь новым является естественность введения в теорию зарядов и спиновых наблюдаемых, а также отсутствие нулевой энергии и нулевого заряда.

Литература

1. Закир З. *Теор.физ.,астрофиз. и космол.,* (2011) **6**, 1, 1; **6**, 2, 14.
2. Закир З. *Теор.физ.,астрофиз. и космол.,* (2006) **1**, 1, 12; **1**, 4, 67; (2007) **2**, 2, 10; *arXiv*:0705.0899.
3. Пайерлс Р. Сюрпризы в теоретической физике. Н. 1988. (с.22)