*Теоретическая физика, астрофизика и космология* ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **6**, N 2, с. 14 – 31, в1, 5 сентября 2011

Электрон.: ТФАК: 3900-021 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.3900-021

# Вращательное квантование зарядово-симметричных систем. 1. Гармонические осцилляторы.

*Захид Закир* [1]

## Аннотация

В системе из частицы и античастицы в гармоническом потенциале, представляемой как осциллятор с комплексной обобщённой координатой, имеется глобальная $U(1)$ симметрия, а также симметрия относительно зарядового сопряжения ($C$-симметрия). Две пары лестничных операторов, обычно вводимые при частотном разложении канонических переменных, не являются взаимно зарядово-сопряжёнными и поэтому общепринятая их интерпретация как операторов зарядово-сопряжённых квантов нарушает $C$-симметрию. Имеются операторные тождества между билинейными произведениями лестничных операторов, позволяющие выразить наблюдаемые через зарядово-сопряжённые операторы и корректно учесть $C$-симметрию. Эти тождества сохраняются и для $C$-симметричных взаимодействий. В лагранжиане разные упорядочения комплексно сопряжённых операторов импульса ведут к разным операторам заряда и не эквивалентны при взаимодействии с калибровочным полем. Из-за условий $C$-симметрии нулевой заряд не возникает в обеих способах упорядочения, а в первом случае исчезает и нулевая энергия. Рассмотрен вклад взаимодействия с калибровочным полем и ангармоническими потенциалами в высших порядках теории возмущений. Эта же система может быть представлена и как частицы с положительной и отрицательной частотами, идущие вперёд и назад во времени соответственно, но если считать, что знак массы совпадает со знаком частоты, то нормы отрицательно-частотных состояний остаются положительными.

*PACS*: 03.65.Ge, 11.30.Er, 1130.Ly, 11.90.+t
*Ключевые слова: Гамильтонова динамика, дискретные симметрии, квантование*

## Содержание



[1] *Центр теоретической физики и астрофизики*, *Ташкент*, *Узбекистан*, zahidzakir@theor-phys.org

## Введение

В стандартной теории линейного и кругового гармонического осцилляторов, несмотря на их казалось бы детальную изученность, есть несколько проблем, которые долгое время оставались нерешёнными. Недавно найденные их решения [1-3] оказались естественными, а их последствия - нетривиальными.

В стандартной формулировке квантовой теории поля нормальные моды полей квантуются по аналогии с линейными гармоническими осцилляторами и поэтому ряд проблем в теории поля оказались лишь следствиями указанных проблем в теории осциллятора и также были достаточно просто решены.

Первая проблема – это предсказание *расходящейся нулевой энергии вакуума* квантовых полей, что с учётом реальности гравитации ведёт к несостоятельности таких теорий уже по этой причине. Нулевые флуктуации, очевидно, неизбежны для линейных осцилляторов. Ответ же на вопрос о том, могут ли симметрии систем из нескольких однотипных осцилляторов привести к исключению нулевых энергий, казался очевидным и отрицательным. Поэтому и здесь было принято считать нулевые энергии неизбежными, а для их исключения предлагались ряд изменений основ квантовой механики и теории поля.

Вторая проблема - это *отрицательная норма* отрицательно-частотных состояний осциллятора. Такая норма ведёт к *отрицательным вероятностям* и делает теорию физически несостоятельной. Этими состояниями можно пренебречь в нерелятивистской теории, но они появятся в релятивистских теориях. Многие предложения для решения проблемы хорошо известны и также основаны на постулировании ряда изменений в основах квантовой механики.

Найденные недавно [1-3] решения обеих проблем в рамках стандартной квантовой механики исходили из двух новых идей - одной методологической и одной физической. Первая идея состояла в том, что стандартная трактовка видимо содержит некие скрытые нефизические ограничения («гипотезы-вирусы»), которые и приводят к известным нефизическим следствиям. Нахождение и снятие этих лишних ограничений тогда и приведёт к состояниям с положительной нормой и к релятивистским системам без нулевых энергий. Поэтому вместо усложнения теории новыми гипотезами ставилась задача найти и исключить лишние гипотезы нынешней теории, что является более простой и разрешимой задачей.

Вторая идея состояла в том, что выявление таких гипотез стандартного подхода следует начать с проверки искусственных ограничений на внешние параметры теории и соблюдения ограничений основных дискретных симметрий, таких как, пространственно-временная инверсия и зарядовое сопряжения.

В данной статье приводится систематическое изложение такого подхода и полученных результатов. Кратко рассматриваются ограничения со стороны симметрий, выявляются нарушающие их положения и, исключая последние, стандартная теория гармонического осциллятора переформулируется в более последовательной форме. Нормы всех состояний при этому положительны, а в системах осцилляторов с зарядовой симметрией нулевые энергии не возникают.

В разделах 1-3 статьи рассматриваются зарядово-симметричные системы осцилляторов. В разделе 4 изучаются взаимодействия в таких системах осцилляторов. Решение проблемы отрицательной нормы для отрицательно-частотных состояний приведено в разделе 5. Основные ссылки на литературу были приведены в предыдущих публикациях.

## 1. Осциллирующие частица и античастица: зарядовая симметрия и её нарушение

Рассмотрим зарядово-симметричную систему из частицы и античастицы в потенциале линейного гармонического осциллятора вдоль *одной и той* же оси $x$ и нарушение этой симметрии после квантования. В своих собственных переменных античастица, также как и частица, описывается положительно-частотным осциллятором. Отличие от частицы лишь в знаке заряда ведёт к симметрии относительно зарядового сопряжения, а заряд проявляется лишь при включении взаимодействий.

Лагранжиан тогда имеет вид:

$$L=\frac{m}{2}\left[\left(\partial_t x_1\right)^2+\left(\partial_t x_2\right)^2-\omega^2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right], \tag{1}$$

где $x_1$ и $x_2$ - координаты частицы и античастицы. Из него следуют импульсы $p_j=m\partial_t x_j$ ($j=1,2$) и гамильтониан:

$$H=\frac{1}{2m}\left[p_1^2+p_2^2+\left(m\omega\right)^2\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]. \tag{2}$$

Уравнения движения ведут к частотным разложениям:

$$x_j=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_j e^{-i\omega t}+a_j^* e^{i\omega t}\right),\quad p_j=\frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_j e^{-i\omega t}-a_j^* e^{i\omega t}\right), \tag{3}$$

а обратные формулы имеют вид:

$$a_j=\frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega x_j+ip_j\right),\quad a_j^*=\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega x_j-ip_j\right). \tag{4}$$

Коммутационные соотношения дают:

$$i[p_j,x_j]=1 \quad\Rightarrow\quad [a_j,a_j^*]=1, \tag{5}$$

и гамильтониан в терминах лестничных операторов приобретает вид:

$$H=\omega\left(a_1^*a_1+a_2^*a_2+1\right). \tag{6}$$

Лагранжиан (1) системы из двух осциллирующих зарядово-сопряжённых частиц симметричен относительно поворотов на конфигурационной плоскости переменных $(x_1,x_2)$, сохраняющих «обобщённый радиус» $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$. Симметрии системы проявляются при комплексном представлении переменных:

$$\begin{gathered}q=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1+ix_2\right),\quad q^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1-ix_2\right),\\ p=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_1-ip_2\right),\quad p^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_1+ip_2\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Частотные разложения тогда приобретают вид:

$$\begin{gathered}q=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(a\,e^{-i\omega t}+\beta^* e^{i\omega t}\right),\quad q^*=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(a^* e^{i\omega t}+\beta\,e^{-i\omega t}\right),\\ p=\frac{im\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left(a^* e^{i\omega t}-\beta\,e^{-i\omega t}\right),\quad p^*=\frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left(a\,e^{-i\omega t}-\beta^* e^{i\omega t}\right),\end{gathered} \tag{8}$$

где новые лестничные операторы связаны с прежними как:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 + ia_2\right), \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1 - ia_2\right),$$
$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^* - ia_2^*\right), \qquad \beta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_1^* + ia_2^*\right). \tag{9}$$

В системе с комплексной канонической переменной $q$ симметрии относительно поворотов в комплексной плоскости соответствует сохраняющийся заряд, оператор которого определяется как:

$$Q = i\left(q^* p^* - pq\right) = a^* a - \beta\beta^*, \tag{10}$$

Этот оператор обеспечивает взаимодействие квантов с внешним полем и в таких системах возникает зарядовая симметрия.

Лестничные операторы $\beta,\ \beta^*$ пока следует рассматривать как «вспомогательные» операторы, так как далее будет показано, что они *не являются* «*зарядово-сопряжёнными*» к операторам $a,\ a^*$ «основных» квантов [1,2]. Если в системе важно точное соблюдение зарядовой симметрии, то $\beta,\ \beta^*$ должны быть связаны, используя условия этой симметрии, с операторами $b,\ b^*$, которые изначально вводятся как «зарядово-сопряжённые» к $a,\ a^*$. Коммутационные соотношения $i[p,q] = i[p^*,q^*] = 1$ дают коммутаторы, ненулевые из которых есть:

$$[a,a^*] = [\beta,\beta^*] = 1. \tag{11}$$

Гамильтониан (2) теперь приобретает вид:

$$H = \frac{1}{m} pp^* + m\omega^2 q^* q = \omega\left(a^* a + \beta\beta^*\right) \tag{12}$$

В этом гамильтониане и операторе заряда (10) принято переставлять вторую пару операторов в *нормальном виде* $\beta\beta^* = \beta^*\beta + 1$ и тогда в нём, также как и в (6), будут присутствовать нулевые энергии двух типов осцилляторов.

Однако, при этом зарядовая симметрия, которая формально имеет место до квантования, оказывается нарушенной квантовой поправкой – нулевым зарядом основного состояния. Эта ситуация имеет некоторые черты как *квантовой аномалии* (симметрия нарушена квантовой поправкой), так и *спонтанного нарушения симметрии* (гамильтониан симметричен, а основное состояние нет).

В отсутствие внешнего поля имеет место вырождение энергетических состояний по двум значениям заряда. Операция зарядового сопряжения *C*, при которой энергия системы не меняется, а заряд меняет знак, определяется в виде:

$$H^c \equiv CHC^{-1} = H, \quad Q^c \equiv CQC^{-1} = -Q. \tag{13}$$

Лестничные операторы, зарядово-сопряжённые к прежним, определяются как:

$$b = CaC^{-1}, \quad b^* = Ca^*C^{-1}, \quad \alpha = C\beta C^{-1}, \quad \alpha^* = C\beta^* C^{-1}. \tag{14}$$

$$[b,b^*] = [\alpha,\alpha^*] = 1. \tag{15}$$

Если, как это ранее было общепринято, отождествить операторы:

$$b \to \beta, \quad b^* \to \beta^*, \tag{16}$$

считая $\beta,\ \beta^*$ зарядово-сопряжёнными к $a, a^*$, то это приведёт к явному нарушению зарядовой симметрии:

$$Q = a^* a - bb^* = a^* a - b^* b - 1,$$
$$Q^c = b^* b - aa^* = -\left(a^* a - b^* b - 1\right) - 2 = -Q - 2. \tag{17}$$

Здесь в операторе заряда присутствует «нулевой заряд» основного состояния, но знак этой константы «нулевого заряда» *не меняется при зарядовом сопряжении* и одно из условий зарядовой симметрии (13) нарушается: $Q^c \neq -Q$. Это нарушение следует из (16) и «ненормального» расположения операторов $\beta\beta^*$ в (10) и (12).

Итак, те неявные гипотезы прежних трактовок, которые несовместимы с симметриями системы, это два утверждения, что: 1) операторы $\beta, \beta^*$ зарядово-сопряжены к $a, a^*$; 2) определение «нормального» расположения $a^* a$, принятое для операторов основных квантов, применимо и для операторов $\beta, \beta^*$.

В действительности же в системе с точной зарядовой симметрией по крайней мере одно из этих утверждений нефизическое. Их исключение и то, как это восстановит зарядовую симметрию, будут рассмотрены в следующем разделе.

## 2. Зарядово-симметричная система осцилляторов с и без нулевой энергии

Формально восстановить зарядовую симметрию в системе осциллирующих частицы и античастицы можно просто путём переопределения наблюдаемых:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left(H + H^c\right), \quad \tilde{Q} = \frac{1}{2}\left(Q - Q^c\right). \tag{18}$$

когда гамильтониан останется прежним, но заряд переходит в:

$$\tilde{Q} = \frac{1}{2}\left(a^* a + aa^* - b^* b - bb^*\right) = a^* a - b^* b = -\tilde{Q}^c. \tag{19}$$

Но, это означает изначальный выбор зарядово-симметризованного лагранжиана, содержащего вместо $Q$ оператор $\tilde{Q}$, что есть уже другой модельный лагранжиан $\tilde{L}$. При включении взаимодействий он даёт физически отличающиеся следствия, в частности, из (19) видно, что в основном состоянии нет нулевого заряда.

Далее рассмотрим модели без специальной симметризации, т.е. с «минимальными» лагранжианами $L$, а соотношения, связывающие операторы $\beta$ и $b$, получим из условий зарядовой симметрии [1,2].

Гамильтониан и оператор заряда состояний, зарядово-сопряжённых к прежним, тогда приобретают вид:

$$H^c = \omega\left(b^* b + \alpha\alpha^*\right), \quad Q^c = b^* b - \alpha\alpha^*. \tag{20}$$

Условия *C*-симметрии (13) в подробной записи представляют собой соотношения:

$$H = \omega\left(a^* a + \beta\beta^*\right) = \omega\left(b^* b + \alpha\alpha^*\right) = H^c,$$
$$Q = a^* a - \beta\beta^* = -\left(b^* b - \alpha\alpha^*\right) = -Q^c, \tag{21}$$

которые дают:

$$a^* a + \beta\beta^* = b^* b + \alpha\alpha^*,$$
$$a^* a - \beta\beta^* = -b^* b + \alpha\alpha^*. \tag{22}$$

Складывая и вычитая эти соотношения, получаем два тождества между операторными произведениями:

$$\alpha\alpha^* = a^* a\,,\quad \beta\beta^* = b^* b. \tag{23}$$

Второе тождество здесь есть зарядово-сопряжённая форма первого.

Эти тождества позволяют полностью исключить из гамильтониана и оператора заряда вспомогательные операторы $\beta,\ \beta^*$ и зарядов-сопряжённые к ним операторы $\alpha, \alpha^*$, выразив обе пары через операторы основных квантов $a,\ a^*$ и зарядово-сопряжённых к ним квантов $b,\ b^*$:

$$\begin{aligned} H &= H^c = \omega\left(a^* a + b^* b\right),\\ Q &= -Q^c = a^* a - b^* b. \end{aligned} \tag{24}$$

Как видим, операторы естественным образом нормально упорядочены и поэтому системы с комплексными каноническими переменными и с точной *C*-симметрией не содержат нулевой энергии и нулевого заряда.

Наличие нетривиальных тождеств (23) между произведениями лестничных операторов выглядит загадочно и возникает вопрос, с чем это связано с физической точки зрения. В следующем разделе будут обсуждаться физические основания для этого, но некие намётки с формальной точки зрения можно привести и здесь.

Оператор заряда $Q$ является аналогом углового момента $M$ и выражает симметрию относительно поворотов в комплексной плоскости координаты $q$. В случае углового момента энергия вращений выражается через угловой момент как $H = M\omega$, где $\omega$ - угловая скорость. Учитывая это, каждый из взаимно зарядово-сопряжённых операторов $Q,\ Q^c$ представим в виде суммы операторов заряда для двух видов осцилляторов:

$$Q = Q_a + Q_\beta,\quad Q^c = Q_b + Q_\alpha. \tag{25}$$

где $Q_a = a^* a,\ \ Q_\beta = -\beta\beta^*,\ Q_b = b^* b,\ \ Q_\alpha = -\alpha\alpha^*$. Гамильтониан (21) тогда можно записать через эти операторы заряда в виде:

$$H = \left(Q_a - Q_\beta\right)\omega = \left(Q_b - Q_\alpha\right)\omega = H^c \tag{26}$$

В результате, условия зарядовой симметрии (13) превращаются в соотношения между операторами заряда мод:

$$\begin{aligned} Q_a - Q_\beta &= Q_b - Q_\alpha,\\ Q_a + Q_\beta &= -Q_b - Q_\alpha. \end{aligned} \tag{27}$$

Далее, после сложения и вычитания этих двух соотношений, получаем:

$$Q_a = -Q_\alpha,\quad Q_\beta = -Q_b. \tag{28}$$

что является не только более компактной записью тождеств (23), но и придаёт им некий физический смысл. Итак, выражения для наблюдаемых приобретают вид:

$$\begin{aligned} H &= H^c = Q_a\omega - Q_b\omega,\\ Q &= -Q^c = Q_a + Q_b. \end{aligned} \tag{29}$$

Эти соотношения, сводящие соотношения между наблюдаемыми к «алгебре зарядов», свидетельствуют о том, что физическую интерпретацию исчезновения нулевой энергии для осцилляторов с зарядовой симметрией можно как-то связать с вращениями, пусть и в «зарядовом пространстве». Некоторые дополнительные аргументы в пользу такой трактовки будут приведены в следующем разделе.

## 3. О физических следствиях зарядовой симметрии осцилляторов

Отсутствие нулевой энергии для системы гармонических осцилляторов с зарядовой симметрией необычно для нерелятивистских систем. Но само обобщение модели нерелятивистского гармонического осциллятора на релятивистские поля чисто формальное и далеко выходит за рамки интуитивных механических моделей. Поэтому такой новый поворот в следствиях формализма, как отсутствие нулевой энергии в случае, специфичном для релятивистских систем, необходимо воспринимать как новую перспективу для исследований. Как примеры следствий, характерных и для релятивистских систем, рассмотрим несколько новых свойств систем осцилляторов с такой симметрией.

В основе интуитивного понимания нулевой энергии при квантовании механической модели гармонического осциллятора лежат ограничения со стороны соотношений неопределённостей. Для понимания новой ситуации и с этой точки зрения в Приложении 1 приведено обобщение этих соотношений на системы с неэрмитовыми каноническими переменными, полученные ранее в [2]:

$$\left\langle q^* q\right\rangle\left\langle p^* p\right\rangle \geq \frac{1}{4}\left(i\left\langle q^* p^* - pq\right\rangle\right)^2 = \frac{1}{4}\left\langle Q\right\rangle^2 . \tag{30}$$

Из них следует, что если в основном состоянии системы нет нулевого заряда и зарядовая симметрия соблюдается, то $\left\langle Q\right\rangle = 0$ и нет квантовых флуктуаций, т.е. это состояние ведёт себя классически. Для поля это означало бы, что вакуум поля есть классическое внешнее поле, которое не квантуется (как кулоновское поле).

Ещё одно новое следствие зарядовой симметрии связано с корреляторами. Коммутатор операторов

$$\left[q(t'), q^*(t)\right] = \frac{1}{2m\omega}\left(\left[a, a^*\right]e^{-i\omega(t'-t)} - \left[\beta, \beta^*\right]e^{i\omega(t'-t)}\right) = \frac{-i}{m\omega}\sin\left[\omega(t'-t)\right], \tag{31}$$

как нечётная функция времени, исчезает при равных временах, что естественно.

Более интересно то, что при формальном подходе *нечётен* по времени и коррелятор этих переменных для разных времён (с причинными ограничениями):

$$\begin{aligned}\left\langle 0\right| q(t')q^*(t)\left|0\right\rangle &= \frac{1}{2m\omega}\left\langle 0\right| aa^*\theta(t'-t)e^{-i\omega(t'-t)} + \beta^*\beta\,\theta(t-t')e^{i\omega(t'-t)}\left|0\right\rangle = \\ &= \frac{1}{2m\omega}\left[\theta(t'-t)e^{-i\omega(t'-t)} - \theta(t-t')e^{i\omega(t'-t)}\right].\end{aligned} \tag{32}$$

Здесь учтено, что основные состояния определены как $a\left|0\right\rangle = 0,\, b\left|0\right\rangle = 0$ и поэтому, в соответствие с тождествами (23), имеет место соотношение

$$\left\langle 0\right|\beta^*\beta\left|0\right\rangle = \left\langle 0\right|\beta\beta^* - 1\left|0\right\rangle = \left\langle 0\right|b^*b - 1\left|0\right\rangle = -1. \tag{33}$$

Такое поведение пропагатора в теории поля привело бы вместо стандартного причинного пропагатора, который строится как чётная функция времени, к функции Паули-Йордана, исчезающей в нуле и за световым конусом. Построение чётного коррелятора будет рассмотрено ниже. Интересно также формальное исчезновение среднего по основному состоянию:

$$\left\langle 0\right| q(t')^* q(t)\left|0\right\rangle = \frac{1}{2m\omega}\left\langle 0\right| a^*ae^{i\omega(t'-t)} + \beta\beta^*e^{-i\omega(t'-t)}\left|0\right\rangle = 0, \tag{34}$$

что ведёт к свойству «сильного» нормального упорядочения операторов в выражениях для наблюдаемых.

С другой стороны, так как в наблюдаемых теории (24) остались только взаимно зарядово-сопряжённые операторы $a, b$ и состояния также строятся только с их участием, то в принципе теорию с взаимодействием можно строить только на базе этих же операторов. *Процедура «нормального упорядочения» тогда будет не постулатом, как прежде, а следствием учёта требований зарядовой симметрии.*

Для прояснения физического смысла нетривиальных следствий зарядовой симметрии рассмотрим теперь сочетания этой симметрии с другими дискретными симметриями, которые в итоге приведут к *кроссинг-симметрии* амплитуд. При этом сохранение заряда приводит к двум важным отличиям от осциллятора.

С одной стороны, кванты линейного осциллятора могут рождаться и уничтожаться в любом количестве, соблюдая лишь баланс энергии и импульса, тогда как перенос сохраняющегося кванта заряда по мировым линиям квантов и антиквантов происходит по непрерывной траектории.

С другой стороны, основные состояния, определяемые как

$$a\left|0\right\rangle = 0,\ b\left|\bar{0}\right\rangle = 0 \tag{35}$$

($n, \bar{n} = 0,1,2,...$ - числа квантов и антиквантов), а также возбуждённые состояния:

$$\begin{aligned} a\left|n\right\rangle &= \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle, \quad a^*\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle, \\ b\left|\bar{n}\right\rangle &= \sqrt{\bar{n}}\left|\bar{n}-1\right\rangle, \quad b^*\left|\bar{n}\right\rangle = \sqrt{\bar{n}+1}\left|\bar{n}+1\right\rangle, \end{aligned} \tag{36}$$

образуют *два* отдельных гильбертовых пространства состояний для квантов $\left|n\right\rangle$ и антиквантов $\left|\bar{n}\right\rangle$, которые переходят друг в друга при зарядовом сопряжении:

$$\left|\bar{n}\right\rangle = C\left|n\right\rangle, \quad \left|n\right\rangle = C\left|\bar{n}\right\rangle. \tag{37}$$

В результате этого каждое состояние системы $\left|n, \bar{n}\right\rangle$ *есть определённое сочетание состояний из двух гильбертовых пространств*. Какое именно сочетание берём зависит не от того, как нам удобно, а от жёстких «правил отбора», обеспечивающих при образовании матричных элементов сохранение заряда и кроссинг-симметрию (зарядовое сопряжение вместе с эрмитовым сопряжением). При этом, речь идёт о тех процессах, которые *при данных* начальных и конечных состояниях соответствуют альтернативам, амплитуды которых суммируются.

Итак, если известны матричные элементы с операторами $a, a^*$, то соответствующие матричные элементы альтернатив с участием операторов $b, b^*$ можно и нужно получать используя «правила отбора», выражающие базовые дискретные симметрии - обращение времени и зарядовое сопряжение, чтобы далее они не были нарушены, а их условия типа кроссинг-симметрии соблюдались автоматически.

Записав операторы наблюдаемых сначала для квантов:

$$H_a = \omega a^* a,\ \ Q_a = a^* a, \tag{38}$$

соответствующие наблюдаемые для зарядово-сопряжённых квантов получаем после зарядового сопряжения операторов наблюдаемых квантов:

$$H_b = CH_aC^{-1} = \omega b^* b, \quad Q_b = CQ_aC^{-1} = -b^* b. \tag{39}$$

Полные зарядово-симметричные (антисимметричные) операторы наблюдаемых тогда есть сумма этих двух:

$$H = H^c = H_a + H_b, \quad Q = -Q^c = Q_a + Q_b. \tag{40}$$

Для этого выражения для оператора координаты перепишем через зависящие от времени лестничные операторы:

$$q(t)=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left[a(t)+b^*(t)\right],\quad q^*(t)=\frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left[a^*(t)+b(t)\right] \tag{41}$$

и рассмотрим матричные элементы от $aa^*$:

$$\langle 1;\Delta t, f\,|a^*(\Delta t)|0\rangle\left[\langle 0|a(\Delta t)a^*(0)|0\rangle\right]\langle 0|a(0)|1;0,i\rangle, \tag{42}$$

которые описывают переход начального состояния в промежуточное с рождением нового кванта в момент $t_i=0$, распространение и переход промежуточного состояния в конечное в момент $t_f=\Delta t$ с уничтожением этого кванта. Альтернативные к (42) промежуточные состояния с антиквантами *при тех же* начальных и конечных состояниях дают матричные элементы уже от $bb^*$:

$$\langle 1;-\Delta t, f\,|a^*(-\Delta t)|0\rangle\left[\langle \bar{0}|b(0)b^*(-\Delta t)|\bar{0}\rangle\right]\langle 0|a(0)|1;0,i\rangle \tag{43}$$

Они описывают рождение пары в момент $t_f=-\Delta t$ (кванта в конечном состоянии и антикванта в промежуточном состоянии), распространение антикванта и его аннигиляция с квантом в начальном состоянии в момент $t_i=0$ (кроссинг-диаграмма). В данном кроссинг-переходе для состояний в промежуточном состоянии производится зарядовое сопряжение и обращение *интервала* времени. При этом $a^*(0)$ переходит в $b(0)$, а $a^*(\Delta t)$ в $b(-\Delta t)$ с взаимной перестановкой.

Итак, если оператор кванта в промежуточном состоянии действует справа на начальное состояние, то антикванта – на конечное состояние. В результате появляются кроссинг-диаграммы с обратной последовательностью времён входа начальных и выхода конечных состояний. Найденные тождества (23) поэтому можно рассматривать как способ выражения этого обстоятельства – кроссинг-симметрия выразилась в *изменении расположения операторов*.

Но, мы можем ввести и другой способ – не меняя расположение операторов, *изменить способ вычисления матричных элементов*. А именно, с одной стороны, если из выражений

$$a^*(\Delta t)a(0)\to\langle n,\bar{n};\Delta t|a^*(\Delta t)a(0)|n,\bar{n};0\rangle, \tag{44}$$

хотим перейти к кроссинг-симметричным к ним, то получаем:

$$b^*(0)b(-\Delta t)\to\langle n,\bar{n};\Delta t|b^*(0)b(-\Delta t)|n,\bar{n};0\rangle. \tag{45}$$

С другой стороны, это эквивалентно последовательности соотношений:

$$\begin{aligned}b(-\Delta t)b^*(0)\to b(-\Delta t)|n,\bar{n};0\rangle\langle n,\bar{n};\Delta t|b^*(0)=\\=\langle n,\bar{n};\Delta t|b^*(0)b(-\Delta t)|n,\bar{n};0\rangle.\end{aligned} \tag{46}$$

Это означает, что как рецепт для практических вычислений можно взять следующее: если по операторам частиц матричный элемент берётся как $\langle f\,|a^*|n\rangle\langle n|a|i\rangle$, то кроссинг-симметричный к нему матричный элемент должен браться как:

$$\langle n|b|i\rangle\langle f\,|b^*|n\rangle=\langle f\,|b^*|n\rangle\langle n|b|i\rangle. \tag{47}$$

Необычные тождества (23) тогда будут символическими выражениями обычных свойств кроссинг-симметрии матричных элементов, когда операторы $\beta,\beta^*$ есть те же $b,b^*$, но в левой части (47) ещё до перестановки. Это значит, что:

$$\begin{aligned} & b(t')|0\rangle\langle 0|b^*(t) = \langle 0|b^*b|0\rangle = 0, \\ & b^*(t')|0\rangle\langle 0|b(t) = \langle 0|b(t)b^*(t')|0\rangle. \end{aligned} \tag{48}$$

В такой трактовке коррелятор, формально казавшийся нечётным по времени как в (32), при взятии матричных элементов по правилу (47) теперь будет иметь вид:

$$\langle 0|q(t')q^*(t)|0\rangle = \frac{1}{2m\omega}\langle 0|aa^*\theta(t'-t)e^{-i\omega(t'-t)} + bb^*\theta(t-t')e^{i\omega(t'-t)}|0\rangle, \tag{49}$$

и становится чётным по времени как и в прежнем стандартном подходе.

## 4. Взаимодействия зарядово-симметричных осцилляторов

Переходя к рассмотрению взаимодействий *C*-симметричных осцилляторов ограничимся *C*-симметричными же потенциалами взаимодействия. При комплексной обобщённой координате $q$ и потенциале $V(q^*q)$ имеется $U(1)$ симметрия с оператором сдвига $U = \exp(iQ\alpha)$, где параметр $\alpha$ постоянен, а заряд сохраняется: $\partial_t Q = 0$. Для обеспечения же вращательной симметрии с $U(t) = \exp[iQ\alpha(t)]$ необходимо присутствие *калибровочного поля* $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$, преобразующегося как $A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu \alpha$ , а ковариантная производная по времени имеет вид $D_t \equiv \partial_t - ig\phi$ , где $g$ -константа связи.

Минимальная форма калибровочно-инвариантного лагранжиана имеет вид:

$$\begin{aligned} & L = m(D_t q)^*(D_t q) - V = \\ & = m(\partial_t q)^*(\partial_t q) + gQ\phi + mg^2\phi^2 q^* q - V\,, \end{aligned} \tag{50}$$

Обобщённые импульсы $\pi^*(t) = m(D_t q)$ и $\pi(t) = m(D_t q)^*$ при квантовании должны взаимно коммутировать, но тогда скорости $\partial_t q$ и $(\partial_t q)^*$ уже *не коммутируют*:

$$\begin{aligned} & [\pi(t), \pi^*(t)] = 0, \\ & [\partial_t q(t), \partial_t q^*(t)] = \frac{2}{m} g\phi M, \end{aligned} \tag{51}$$

где эффективный «угловой момент» $M$ определён как обычно:

$$M = i(qp - q^* p^*) = q_1 p_2 - q_2 p_1 = -(Q+1). \tag{52}$$

В результате этого выбор упорядочения произведения скоростей в квантовом лагранжиане является *дополнительной физической гипотезой*, определяющей наличие или отсутствие энергии и заряда основного состояния.

Для системы с гармоническим потенциалом $V = k\,q^* q$ лагранжиан (50) в общем случае ведёт к основному состоянию с отличными от нуля «нулевой энергией» и «нулевым зарядом», что соответствует колебательным модам независимых осцилляторов. В системах с тем же потенциалом и с точной зарядовой симметрией не будет нулевой энергии (и нулевого заряда).

При условии *C*-симметрии потенциала взаимодействия: $V = V_c$, где $V_c = CVC^{-1}$, полный гамильтониан также будет *C*-симметричным и удовлетворяет условиям (для потенциалов, не изменяющих оператор заряда):

$$H = \omega\left(a^* a + \beta\beta^*\right) + gQ\phi + V = \omega\left(b^* b + \alpha\alpha^*\right) + gQ^c\phi^c + V_c = H_c. \qquad (53)$$

Здесь вклады потенциалов взаимодействия в обеих частях равенства одинаковы. В результате, условие симметрии для полного гамильтониана сводится к прежнему условию для невозмущённого гамильтониана и ранее полученные операторные тождества (23) сохранятся и при включении *C*-симметричных взаимодействий.

Для *C*-симметричных вкладов каждый из членов ряда теории возмущений также будет *C*-симметричным. В самом деле, благодаря (53) энергии зарядово-сопряжённых уровней одинаковы, а матричные элементы связаны условиями *C*-симметрии:

$$\begin{gathered}\langle n_+|V|n_+\rangle = \langle n_+|C^{-1}V_cC|n_+\rangle = \langle n_-|V_c|n_-\rangle, \\ \langle n_+|V|m_\pm\rangle\langle m_\pm|V|n_+\rangle = \langle n_-|V_c|m_\mp\rangle\langle m_\mp|V_c|n_-\rangle, \ldots\end{gathered} \qquad (54)$$

Итак, такие вклады в условии симметрии (53) сокращаются, оставляя в равенстве только вклады невозмущённого гамильтониана и поэтому *тождества* (23) *сохраняются при учёте вкладов высших порядков теории возмущений*.

Весьма важен вопрос о том, *изменяется ли энергия основного состояния* при включении взаимодействий тогда, когда нет нулевой энергии в невозмущённом гамильтониане. Так как в оператор заряда *Q* лестничные операторы входят в нормально-упорядоченном виде, то взаимодействия не дают вклада в вакуумные средние от полного оператора заряда в теории возмущений.

В первом порядке теории возмущений ненулевые вакуумные средние от (52) могут быть только из-за члена, пропорционального внешнему полю. Но, во-первых, эти вклады исчезают при снятии внешнего поля, а во-вторых при условии *C*-симметрии они исчезают и при ненулевом внешнем поле.

Действительно, в первом порядке теории возмущений явно неисчезающие вклады в вакуумное среднее от гамильтониана имеют вид:

$$\langle 0|\tilde{H}|0\rangle = \phi\langle 0|\tilde{Q}_\phi|0\rangle = \phi^2\langle 0|\left(q^*q + q_c^*q_c\right)|0\rangle. \qquad (55)$$

Перейдя в представление лестничных операторов, снова опустив явно исчезающие члены и используя найденные ранее операторные тождества, видим, что матричный элемент зануляется:

$$\langle 0|\left(q^*q + q_c^*q_c\right)|0\rangle = \frac{1}{2\omega}\langle 0|\alpha\alpha^* + \beta\beta^*|0\rangle = \frac{1}{2\omega}\langle 0|a^*a + b^*b|0\rangle = 0. \qquad (56)$$

Как видим, зануление матричных элементов связано с нормальной упорядоченностью билинейных произведений. Так как полное число операторов всегда чётно, то более высокие порядки теории возмущений дадут аналогичные результаты и их вклады в энергию основного состояния также исчезают.

## 5. Проблема отрицательной нормы отрицательно-частотных состояний и её решение

Состояние, зарядово-сопряжённое к данному состоянию, формально может трактоваться как эволюция назад во времени этого состояния, что часто намного проще и удобнее для описания.

В квантовой механике операция обращения времени *T* может быть введена *двумя* способами. В *первом* способе, принятом в нерелятивистской теории, при обращении времени $t \to -t$ знак энергии оставляется положительным $H \to H$. Но тогда *T* описывается *антиунитарным* оператором с эрмитовым сопряжением матричных элементов, что на деле есть скрытое изменение знака энергии.

Во *втором* способе, часто применяемом в релятивистской теории, *T* есть часть пространственно-временной инверсии $x^{\mu} \to -x^{\mu}$ (*PT*), описываемой *унитарным* оператором и при этом 4-импульс системы меняет знак: $p_{\mu} \to -p_{\mu}$, т.е. знак энергии также меняется. В релятивистской теории естественным и более удобным оказывается именно этот способ обращения времени в сочетании с *CP*-симметрией. Для состояний частиц с $-p_{\mu}$ формально допускается только эволюция *обратно* во времени и они затем интерпретируется с физической точки зрения как состояния *античастиц* с $+p_{\mu}$, эволюционирующих вперёд во времени. Эта трактовка позволяет затем построить причинные пропагаторы частиц.

Кроме того, она позволяет *начальное* состояние частицы с $-p_{\mu}$ считать *конечным* состоянием *античастицы* с $+p_{\mu}$. Это есть широко используемое в физике частиц свойство *кроссинг-симметрии* процессов, когда изменение знака 4-импульса частицы в диаграмме или поворот линии частицы вокруг вершины с переводом в другой световой конус превращает её в античастицу (и наоборот).

Далее в статье будет взята за основу именно эта форма обращения времени как части 4-инверсии *PT*, естественным образом сочетающаяся с *CPT*-симметрией в общем случае и с кроссинг-симметрией в частности. В таком случае, при обращении времени $t \to -t$ меняется как знак частоты $\omega \to -\omega$, так и знак энергии $H \to -H$, что прямо следует и из формулы для энергии осциллятора.

Во все стандартные формулы для гармонического осциллятора частота входит в произведении либо с массой $m\omega$, либо со временем $\omega t$, либо квадратично и только в энергию входит линейно и «в одиночку», определяя знак энергии. Из выражений для волновых функций гармонического осциллятора следует, что волновая функция основного состояния

$$|0\rangle = \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2}. \tag{57}$$

останется вещественной и невозрастающей на пространственной бесконечности только *при условии одновременного изменения знаков частоты и массы* $\omega \to -\omega$, $m \to -m$, когда их произведение не меняет знака:

$$m_{\pm}\omega_{\pm} = m\omega, \tag{58}$$

где $m > 0,\ \omega > 0$ и $m_{\pm} = \pm m$, $\omega_{\pm} = \pm\omega$. Волновые функции при этом не изменятся если $\omega_{\pm} \cdot (\pm t) = \omega t$. Коммутаторы же лестничных операторов

$$[a_{\pm}, a_{\pm}^{*}] = 1. \tag{59}$$

вовсе не зависят ни от частоты, ни от массы и поэтому также не изменятся.

В прежних подходах к трактовке состояний осциллятора предполагалось, что *масса в отрицательно-частотных состояниях остаётся положительной*. Это в свою очередь, вместо (59) приводило к отрицательному знаку в коммутаторе и далее к отрицательной норме состояний.

С одной стороны, само это предположение нефизическое, так как масса в релятивистской теории есть энергия в системе покоя и поэтому состояния с положительной массой не должны эволюционировать обратно во времени также, как состояния с отрицательной массой не должны эволюционировать вперёд во времени. С другой стороны, как только *будем считать знаки массы, частоты и* *энергии одинаковыми*, коммутаторы принимают вид (59) и норма отрицательно-энергетического состояния также будет положительной.

Итак, искомая «гипотеза-вирус» как раз и состояла в *предположении о положительной массе для состояний с отрицательной энергией*, идущих обратно во времени. Исключив эту гипотезу и считая знак массы совпадающей со знаком энергии, а значит и частоты, приходим к последовательной теории осциллятора, основные формулы которой приобретут следующий вид.

Лагранжианы линейных гармонических осцилляторов двух типов состояний, отличающихся знаком частоты $\omega_\pm = \pm\omega,\ \omega \ge 0$, с вещественной (обобщённой) координатой $x_\pm$ и массой осциллирующей частицы $m_\pm$:

$$L_\pm = \frac{m_\pm}{2}\left[\left(\partial_t x_\pm\right)^2 - \omega^2 x_\pm^2\right], \tag{60}$$

ведут к импульсам $p_\pm = m_\pm \partial_t x_\pm$, гамильтонианам:

$$H_\pm = \frac{1}{2m_\pm}\left[p_\pm^2 + \left(m\omega\right)^2 x_\pm^2\right] \tag{61}$$

и уравнениям движения:

$$\partial_t^2 x_\pm + \omega^2 x_\pm = 0. \tag{62}$$

Решения уравнений движения ведут к частотным разложениям координат и импульсов:

$$x_\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_\pm e^{-i\omega t} + a_\pm^* e^{i\omega t}\right), \quad p_\pm = \frac{-im\omega}{\sqrt{2m\omega}}\left(a_\pm e^{-i\omega t} - a_\pm^* e^{i\omega t}\right). \tag{63}$$

При таком представлении оператора координаты первый член уменьшает число квантов на единицу в *начальном состоянии*, а второй - в *конечном состоянии*. И наоборот, первый член увеличивает число квантов в конечном состоянии, а второй в начальном. Лестничные операторы в (63) определены как:

$$a_\pm = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega x_\pm + ip_\pm\right), \quad a_\pm^* = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega x_\pm - ip_\pm\right), \tag{64}$$

При квантовании коммутаторы $i[p_\pm, x_\pm] = 1$ ведут к коммутаторам (59) для лестничных операторов.

При этом, операторы разно-частотных состояний взаимно коммутируют, так как действуют в разных пространствах состояний. Эти состояния обеих типов осцилляторов определяются действием соответствующих лестничных операторов на их основные состояния: $a_\pm\left|0_\pm\right\rangle = 0$ и на возбуждённые состояния $\left|n_\pm\right\rangle$:

$$a_\pm\left|n_\pm\right\rangle = \sqrt{n_\pm}\left|n_\pm - 1\right\rangle, \quad a_\pm^*\left|n_\pm\right\rangle = \sqrt{n_\pm + 1}\left|n_\pm + 1\right\rangle, \ldots \tag{65}$$

где $n_\pm = 0,1,2,\ldots$ есть число положительно- и отрицательно-частотных квантов. Лестничные операторы действуют на волновые функции в представлении чисел заполнения. Из нормированных волновых функции основных состояний:

$$\left|0_\pm\right\rangle \to \psi_0\left(x_\pm\right) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x_\pm^2/2} \tag{66}$$

с помощью (65) можно построить волновые функции возбуждённых состояний. Гамильтониан (61) и оператор числа квантов $N_\pm$, в результате, приобретают вид:

$$H_\pm = \omega_\pm \left( N_\pm + \frac{1}{2} \right), \quad N_\pm = a_\pm^* a_\pm. \tag{67}$$

Итак, стандартная теория гармонического осциллятора, расширенная с включением отрицательно-частотных состояний, внутренне самосогласованна и состоятельна если учесть, что знаки массы и энергии частицы всегда одинаковы и поэтому масса частицы с отрицательной энергией также отрицательна. Основное состояние для положительно-частотного сектора есть состояние с наименьшей энергией, а для отрицательно-частотного сектора - с наибольшей энергией.

Переопределим теперь координаты и импульсы так, чтобы размерная константа - *величина* массы $m = |m_\pm|$ далее не фигурировала в формулах:

$$\tilde{x}_\pm = \sqrt{m}\, x_\pm, \quad \tilde{p}_\pm = p_\pm / \sqrt{m}. \tag{68}$$

Лагранжиан системы, а также импульсы и гамильтониан тогда имеют вид:

$$L_\pm = \pm \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_t \tilde{x}_\pm \right)^2 - \omega^2 \tilde{x}_\pm^2 \right], \tag{69}$$

$$H_\pm = \pm \frac{1}{2} \left( \tilde{p}_\pm^2 + \omega^2 \tilde{x}_\pm^2 \right), \quad \tilde{p}_\pm = \pm \partial_t \tilde{x}_\pm. \tag{70}$$

Отметим изменения знаков отрицательно-частотных вкладов.

Коммутационные соотношения и уравнения движения при этом не изменятся, а частотное разложение приобретает вид:

$$\tilde{x}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( a_\pm e^{-i\omega_\pm t} + a_\pm^* e^{i\omega_\pm t} \right), \quad \tilde{p}_\pm = \frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}} \left( a_\pm e^{-i\omega_\pm t} - a_\pm^* e^{i\omega_\pm t} \right), \tag{71}$$

где лестничные операторы $a_\pm, a_\pm^*$ остались прежними, но выражаются в виде:

$$a_\pm = \frac{e^{i\omega_\pm t}}{\sqrt{2\omega}} \left( \omega x_\pm + i p_\pm \right), \quad a_\pm^* = \frac{e^{-i\omega_\pm t}}{\sqrt{2\omega}} \left( \omega x_\pm - i p_\pm \right). \tag{72}$$

Коммутаторы (59) положительны для состояний обоих знаков частоты и нормы этих состояний положительно определены.

Выше гармонические осцилляторы с противоположными знаками частоты (и массы) рассматривались по отдельности. Рассмотрим теперь модель с частотами обеих знаков. Отрицательно-частотное состояние есть описание антикванта в терминах переменных кванта, эволюционирующего обратно во времени.

Лагранжиан и гамильтониан системы теперь имеют вид:

$$L = \frac{m_+}{2} \left[ \left( \partial_t x_+ \right)^2 - \omega^2 x_+^2 \right] + \frac{m_-}{2} \left[ \left( \partial_t x_- \right)^2 - \omega_-^2 x_-^2 \right], \tag{73}$$

$$H = \frac{1}{2m_+} \left[ p_+^2 + \left( m\omega \right)^2 x_+^2 \right] + \frac{1}{2m_-} \left[ p_-^2 + \left( m\omega \right)^2 x_-^2 \right]. \tag{74}$$

При переопределении координат и импульсов (68) с исключением величины массы лагранжиан и гамильтониан системы приобретают вид:

$$L = \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_t \tilde{x}_+ \right)^2 - \omega^2 \tilde{x}_+^2 \right] - \frac{1}{2} \left[ \left( \partial_t \tilde{x}_- \right)^2 - \omega^2 \tilde{x}_-^2 \right], \tag{75}$$

$$H = \frac{1}{2} \left( \tilde{p}_+^2 + \omega^2 \tilde{x}_+^2 \right) - \frac{1}{2} \left( \tilde{p}_-^2 + \omega^2 \tilde{x}_-^2 \right). \tag{76}$$

Гамильтониан и оператор числа частиц далее выражаются в виде:

$$H = \omega_+ \left( N_+ + \frac{1}{2} \right) + \omega_- \left( N_- + \frac{1}{2} \right), \tag{77}$$

и в $H$ присутствуют нулевые энергии двух типов осцилляторов.

Итак, при переопределении динамических переменных (68) параметр массы формально не фигурирует в формулах, но тем не менее *знак массы остаётся и меняет знак отрицательно-частотных вкладов в лагранжиане и гамильтониане*. Это свойство позволяет последовательно вводить отрицательно-частотные моды и в теории поля, где полевые «осцилляторы» появляются без параметра массы.

## Заключение

Наблюдаемые зарядово-симметричных систем гармонических осцилляторов в комплексном представлении могут быть выражены через два наборы лестничных операторов, являющихся зарядово-сопряжёнными друг к другу и тем самым требования *C*-симметрии могут быть выполнены строго. При этом в основном состоянии системы нет не только заряда, но и нулевой энергии.

При включении взаимодействий, сохраняющих зарядовую симметрию, энергия основного состояния остаётся равной нулю во всех порядках ряда теории возмущений. Кроссинг-симметрия состояний позволяет понять полученные операторные тождества и найти соотношения между матричными элементами.

При представлении состояний антиквантов как состояний квантов с отрицательной энергией и частотой масса также должна быть отрицательной. При таком корректном подходе норма состояний с отрицательной частотой также положительна и теория состоятельна.

## Благодарности

Идеи и результаты, представленные в статье, за последние пять лет были подвергнуты многочисленным бурным обсуждениям, что позволило достичь большей ясности и завершённости. Но, как многие новые методы, которые работают, но пока непонятно почему, они подверглись уничтожающей критики с полным игнорированием результатов, хотя в итоге эти результаты оказались понятными и неизбежными. Так как обычно сочетание правильного описания с правильным объяснением большая редкость, то меня интересовали лишь анализ следствий и корректность изложения. Поэтому я благодарен всем тем, кто имел терпение выслушивать результаты, которых я мог вывести, но не мог объяснить.

## Приложения.

### 1. Соотношения неопределённостей для неэрмитовых переменных

Стандартные соотношения неопределённостей Гейзенберга имеют силу только для систем с *эрмитовыми* операторами канонических переменных. В тех системах, где операторы наблюдаемых составляются из эрмитовых произведений *неэрмитовых* канонических переменных, требуется обобщение этих соотношений.

Вначале положим $\langle q \rangle = \langle q^* \rangle = 0$ и рассмотрим связи между средними от билинейных форм $\langle q^* q \rangle$, $\langle p^* p \rangle$, $\langle pq \rangle$ и $\langle q^* p^* \rangle$. Неравенство:

$$\left\langle \left( \lambda q^* - \frac{i}{\hbar} p \right) \left( \lambda q + \frac{i}{\hbar} p^* \right) \right\rangle \geq 0, \tag{78}$$

где $\lambda$ - произвольное вещественное число, при раскрытии скобок даёт:

$$\lambda^2 \left\langle q^* q \right\rangle + \lambda \frac{i}{\hbar} \left\langle q^* p^* - pq \right\rangle + \frac{1}{\hbar^2} \left\langle p^* p \right\rangle \geq 0. \tag{79}$$

Это неравенство удовлетворяется при произвольном вещественном $\lambda$ только при:

$$\left\langle q^* q \right\rangle \left\langle p^* p \right\rangle \geq \frac{1}{4} \left( i \left\langle q^* p^* - pq \right\rangle \right)^2 = \frac{1}{4} \left\langle Q \right\rangle^2 . \tag{80}$$

В случае комплексной системы, где собственные значения заряда квантованы:

$$\left\langle Q \right\rangle = i \left\langle q^* p^* - p\,q \right\rangle = \left\langle \left[ q, p \right]_* \right\rangle = \hbar n_{(\pm)}, \tag{81}$$

где $n_{\pm} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ , соотношения (80) приобретают вид:

$$\left\langle q^* q \right\rangle \left\langle p^* p \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} n_{\pm}^2 . \tag{82}$$

Соотношения (80) - (82) и есть обобщения соотношений неопределённостей для систем с комплексными каноническими переменными [1]. Выражение для ненулевых средних получается отсюда заменой $q' = q - \left\langle q \right\rangle, \quad p' = p - \left\langle p \right\rangle .$

При точной симметрии относительно зарядового сопряжения основное состояние не имеет заряда: $\left\langle Q \right\rangle_0 = 0$ и, в соответствие с (80), получаем:

$$\left\langle q^* q \right\rangle_0 \left\langle p^* p \right\rangle_0 \geq 0. \tag{83}$$

В частности, для релятивистских полей с неритовыми каноническими переменными и зарядовой симметрией, вакуум не содержит «нулевой энергии» [1].

Так как выражение справа в (80) можно представить и через собственные значения углового момента, то неравенство приобретает вид:

$$\left\langle q^* q \right\rangle \left\langle p^* p \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \left( 1 + \left\langle M \right\rangle \right)^2 . \tag{84}$$

Для вещественных канонических переменных ($l = 0$, $\left\langle M \right\rangle = 0$) выражение $q^* p^* - p\,q$ превращается в обычный коммутатор $\left( qp - pq \right) = i\hbar$ . Это затем ведёт к стандартному соотношению неопределённостей Гейзенберга.

## 2. Канонический формализм для систем с комплексными переменными

При обычном определении скобок Пуассона для двух пар канонических переменных рассматриваются, как правило, только две скобки:

$$\left\{ A, B \right\}_{PB} \equiv \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p}, \quad \left\{ A, B \right\}_{PB*} = \frac{\partial A}{\partial p^*} \frac{\partial B}{\partial q^*} - \frac{\partial A}{\partial q^*} \frac{\partial B}{\partial p^*}. \tag{85}$$

Каждая из них инвариантна относительно одной из двух групп канонических преобразований: $(p, q) \to (P, Q)$, $(p^*, q^*) \to (P^*, Q^*)$ .

В действительности же в таких комплексных системах можно рассматривать также и смешанные скобки:

$$\begin{gathered} \left\{ A, B \right\}_{*} \equiv \frac{\partial A}{\partial p^*} \frac{\partial B}{\partial q^*} - \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p}, \quad \left\{ A, B \right\}_{m1} \equiv \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial q^*} \frac{\partial B}{\partial p^*}, \\ \left\{ A, B \right\}_{m2} \equiv \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial p^*} \frac{\partial B}{\partial q^*}, \quad \left\{ A, B \right\}_{m3} \equiv \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial q^*} \frac{\partial B}{\partial p^*}. \end{gathered} \tag{86}$$

В случае вещественных обобщённых координат первые две смешанные скобки переходят в обычные скобки Пуассона, а две последние, меняющие знак при взаимной замене $q \to q^*$, $p \to p^*$, исчезают. Шесть видов скобок (85) и (86) связаны между собой тремя тождествами:

$$\begin{aligned} &\{A,B\}_* + \{A,B\}_{m1} = \{A,B\}_{PB} + \{A,B\}_{PB^*}, \\ &\{A,B\}_{m2} = \{A,B\}_* - \{A,B\}_{PB^*}, \quad \{A,B\}_{m3} = \{A,B\}_{PB^*} - \{A,B\}_{m1}. \end{aligned} \tag{87}$$

Поэтому, независимы только *три* из них, в качестве которых можно выбрать две стандартные (85) и одну из смешанных скобок (86), например, $\{A,B\}_*$.

С физической точки зрения эта третья независимая скобка связана с каноническим инвариантом, следующим из вращательной симметрии на комплексной плоскости $q$. Поэтому этот инвариант есть *угловой момент* $M$ при вращениях в реальном пространстве или *заряд* $Q$ при вращениях в пространстве комплексных переменных. Наблюдаемые выражаются через вещественные комбинации комплексных переменных.

Для самих обобщённых координат и импульсов тогда имеем:

$$\{p_i, q_j\}_{PB} = \{p_i^*, q_j^*\}_{PB*} = \delta_{ij}, \; \{p_i, q_j\}_* = \{p_i, q_j\}_{m1} = -\{p_i^*, q_j^*\}_{m1} = \delta_{ij} \tag{88}$$

$$\{p_i, q_j\}_* = \{p_i, q_j\}_{m1} = -\{p_i^*, q_j^*\}_{m1} = \delta_{ij}. \tag{89}$$

Кроме того, к обычным соотношениям:

$$\{A,q\}_{PB} = \frac{\partial A}{\partial p}, \quad \{p,B\}_{PB} = \frac{\partial B}{\partial q}, \; \{A,q^*\}_{PB^*} = \frac{\partial A}{\partial p^*}, \quad \{p^*,B\}_{PB^*} = \frac{\partial B}{\partial q^*}, \tag{90}$$

добавляются новые:

$$\{A,q\}_* = \frac{\partial A}{\partial p}, \quad \{p,B\}_* = \frac{\partial B}{\partial q}, \quad \{q^*,B\}_* = -\frac{\partial B}{\partial p^*}, \quad \{A,p^*\}_* = -\frac{\partial A}{\partial q^*}, \tag{91}$$

$$\{q,B\}_{m1} = -\frac{\partial B}{\partial p}, \quad \{A,p\}_{m1} = -\frac{\partial B}{\partial q}, \; \{A,q^*\}_{m1} = \frac{\partial A}{\partial p^*}, \quad \{p^*,B\}_{m1} = \frac{\partial B}{\partial q^*}. \tag{92}$$

Эти соотношения можно использовать при интегрировании уравнений движения.

Стандартные коммутаторы $[A,B]$ есть квантовые аналоги стандартных скобок Пуассона $\{A,B\}_{PB}$, а вот обобщённый угловой момент (заряд) $Q$ есть квантовый аналог смешанной скобки $\{A,B\}_*$. Вводя соответствующий этой скобке *смешанный коммутатор* $[A,B]_*$:

$$[A,B]_* = i\left(A^* B^* - BA\right), \tag{93}$$

оператор заряда можно выразить через него в виде:

$$Q = [q,p]_*. \tag{94}$$

Для вещественных обобщённых координат $Q$ переходит в обычный коммутатор:

$$Q \to i(qp - pq) = [q,p]. \tag{95}$$

## Литература

1. Закир З. (2006) *Теор. физ., астрофиз. и космол.,* **1**, 1, с.1; **1**,1, с.12.
2. Закир З. (2007) *Теор. физ., астрофиз. и космол.,* **2**, 1, с.10; *arXiv*:0705.0899