Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **5**, N 2, с. 23 – 27, в1, 9 ноября 2010
Электрон.: ТФАК: 3600-019 в2, 28 сентября 2012
DOI: 10.9751/TFAK.3600-019

4-индексные уравнения для гравитации и гравитационный тензор энергии-импульса[1]

Захид Закир [2]

Аннотация

Обсуждается новая трактовка гравитационной энергии на основе гравитационных уравнений с 4 индексами. Рассмотрена гравитационная энергия для поля Шварцшильда.

PACS: 04.20.Cv, 04.20.Fy, 11.10.-z
Ключевые слова: гравитационная энергия, кривизна, энергия вакуума

Содержание

Введение

Ковариантной физической характеристикой гравитационного поля является тензор кривизны Римана и естественно, что проблемы с энергией-импульсом для гравитации могут быть решены, если мы сможем выразить гравитационную энергию в терминах этого тензора.

В статьях [1-2] была сформулирована новая обобщенная версия уравнений Эйнштейна с 4-индексами, включающие тензор Римана и были построены локальные и линейные относительно тензора кривизны 4-индексные тензоры энергии-импульса для системы из поля гравитации и вещества.

В данной статье будут представлены некоторые следствия этой трактовки, включая вычисление гравитационной энергии для статического сферического источника.

1. 4-индексные уравнения для гравитационного поля

В стандартном гравитационном действии Эйнштейна-Гильберта можно добавиться к тензору Риччи или к тензора Римана произвольную функцию (тензор) с нулевой свёрткой:

$$R = g^{km}R_{km} = \frac{1}{2}(g^{km}g^{il} - g^{im}g^{kl})(R_{iklm} - \kappa V_{iklm}), \tag{1}$$

где $\kappa = 8\pi k / c^4$, и L_m - функция Лангранжа вещества, V_{iklm} имеет те же свойства симметрии, что и R_{iklm} и $g^{il}V_{iklm} = 0$.

---

[1] Препринт статьи была представлен в 1999 (исправлен в 2003): Zakir Z. (1999) arXiv: gr-qc/9906039

[2] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан*, zahidzakir@theor-phys.org

Итак, мы стартуем с новой функции действия :

$$S = \frac{1}{2}\int d\Omega\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}(g^{km}g^{il} - g^{im}g^{kl})\left(-\frac{1}{\kappa}R_{iklm} + V_{iklm}\right) + L_m\right], \qquad (2)$$

которая формально эквивалентна функции действия Эйнштейна-Гильберта (2). Тогда для вариации этого функции действия мы получаем [1]:

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d\Omega\sqrt{-g}\delta g^{km}g^{il}(G_{iklm} - T_{iklm}) = 0, \qquad (3)$$

где $T_{iklm} = V_{iklm} + T^{(m)}_{iklm}$ and:

$$G_{iklm} = \frac{1}{\kappa}\left[R_{iklm} - \frac{1}{(d-1)(d-2)}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})R\right], \qquad (4)$$

$$T^{(m)}_{iklm} = \frac{1}{(d-2)}(g_{km}T_{il} - g_{kl}T_{im} + g_{il}T_{km} - g_{im}T_{kl}) - \\ -\frac{1}{(d-1)(d-2)}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})T \qquad (5)$$

Здесь d -размерность пространства-времени и T_{iklm} имеет такую же структуру, как и тензор Римана, имеющего представление:

$$R_{iklm} = C_{iklm} + \frac{1}{(d-2)}(g_{km}R_{il} - g_{kl}R_{im} + g_{il}R_{km} - g_{im}R_{kl}) - \\ -\frac{1}{(d-1)(d-2)}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})R, \qquad (6)$$

где C_{iklm}- тензор Вейля с нулевой 2-индексной свёрткой $g^{il}C_{iklm} = 0$. Итак, мы получаем уравнения:

$$g^{il}(G_{iklm} - T_{iklm}) = 0. \qquad (7)$$

В общем случае для произвольного и V_{iklm} выражение в круглой скобке не равно нулю и мы не можем просто исключить коэффициент свёртки g^{il}. Однако у тензора V_{iklm} есть 10 независимых компонент, что равно числу компонент тензора Римана в вакууме ($T^{(m)}_{km} = 0$), где он сводится к тензору Вейля. Поэтому, если в этом случае мы выбираем V_{iklm} как равный последнему:

$$\frac{1}{\kappa}G_{iklm} = \frac{1}{\kappa}C_{iklm} = V_{iklm}, \qquad (8)$$

то уравнения выполняются тождественно для решений уравнений Эйнштейна. Таким образом, мы можем написать уравнения с 4-индексами для гравитационного поля в виде [1]:

$$G_{iklm} = T_{iklm}. \qquad (9)$$

Мы видим, что V_{iklm} можно рассматривать как 4-индексный тензор плотности энергии-импульса для гравитационного поля. Хотя его 2-индексная свёртка обращается в нуль, в 4-индексной форме он позволяет определить отличный от нуля локальный и положительно-определенный тензор энергии-импульса для гравитационного поля.

Тензоры G_{iklm} и T_{iklm} имеют свойства симметрии тензора Римана и поэтому у нас есть 20 уравнений. Тензор G_{iklm} есть функция метрического тензора, g_{ik}, у которого есть 6 независимых компонент. Тензор $T^{(m)}_{iklm}$ был составлен из обычного тензора энергии-импульса вещества T_{ik} и у него есть 4 независимых функции (плотность энергии ϵ и компоненты скорости). Эти 10 функций удовлетворяют 10 уравнениям Эйнштейна. Тензор V_{iklm} даёт дополнительно 10 независимых компонент.

Итак, у нас есть 20 уравнений для 20 независимых функций. Если мы берём решения уравнений Эйнштейна для метрики и T_{ik}, то у нас есть дополнительные 10 уравнений для 10 компонент V_{iklm}. Поэтому решения уравнений Эйнштейна в точности определяют все компоненты V_{iklm} и мы можем найти V_{iklm} для известных стандартных метрик.

В вакууме и $T_{ik} = T = 0, R_{il} = R = 0$ и мы имеем уравнения (8). Как видим, в вакууме тензор V_{iklm} играет роль источника для кривизны пустого пространства-времени C_{iklm}.

Ковариантные производные 4-индексных тензоров также связаны:

$$G^{i}_{klm\ ;i} = T^{i}_{klm;i}. \tag{10}$$

В случае $d = 4$ мы имеем:

$$G^{i}_{.klm;i} = T_{km;l} - T_{kl;m} - \frac{1}{3}(g_{km}T_{,l} - g_{kl}T_{,m}), \tag{11}$$

$$T^{j(m)}_{klm;j} = \frac{1}{2}\left[T_{km;l} - T_{kl;m} - \frac{1}{3}(g_{km}T_{;l} - g_{kl}T_{;m})\right] = \frac{1}{2}G^{i}_{.klm;i}. \tag{12}$$

В этом случае получаем зависимость:

$$V^{j}_{klm;j} = G^{j}_{klm;j} - T^{j(m)}_{klm;j} = \frac{1}{2}G^{i}_{.klm;i}. \tag{13}$$

и поэтому

$$V^{j}_{klm;j} = T^{j(m)}_{klm;j} \tag{14}$$

В вакууме, следовательно, имеют место локальные законы сохранения:

$$G^{j}_{\cdot klm;j} = V^{j}_{klm;j} = 0. \tag{15}$$

Интегральный тензор энергии-импульса для системы из вещества и гравитационного поля может быть определен как:

$$P^{i}_{lm} = \int dS_k T^{ik}_{..lm}. \tag{16}$$

На гиперповерхности $x^0 = const$ имеем:

$$P^{k}_{.lm} = \int d^3x\sqrt{-g}T^{0k}_{..lm} = \int d^3x\sqrt{-g}(T^{(m)0k}_{..lm} + V^{0k}_{..lm}). \tag{17}$$

Вектор энергии-импульса для вещества может быть получен как: $P^i = P^{ik}_{.k}$. Наконец, 3-индескный интеграл энергии-импульса для гравитационного поля может быть определён как:

$$P^{(g)i}_{.lm} = \int d^3x\sqrt{-g}V^{0i}_{..lm}. \qquad (18)$$

2. Гравитационная энергия для поля Шварцшильда

Рассмотрим энергию поля Шварцшильда с линейным элементом:

$$ds^2 = \ 1 - r_g \ / \ r \ \ dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g \ / \ r} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \qquad (19)$$

где $r_g = 2Gm$ - гравитационный радиус, компоненты метрики равны: $g_{22} = -r^2$, $g_{33} = -r^2\sin^2\vartheta$ и:

$$g_{00} = g_{11}^{-1} = 1 - r_g \ / \ r. \qquad (20)$$

Для этого решения уравнений Эйнштейна найдём 4-индесный тензор энергии-импульса:

$$V^{ik}_{lm} = \frac{1}{\kappa}R^{ik}_{lm} \qquad (21)$$

Ненулевые компоненты $V_{iklm} = R_{iklm} \ / \ \kappa$ с этой метрикой равны:

$$\begin{aligned} V_{0101} &= \frac{r_g}{\kappa r^3} = -V(r)g_{00}g_{11}, \\ V_{0202} &= -\frac{r_g(r - r_g)}{2\kappa r^2} = \frac{1}{2}V(r)g_{00}g_{22}, \\ V_{0303} &= -\frac{r_g(r - r_g)}{2\kappa r^2}\sin^2\vartheta = \frac{1}{2}V(r)g_{00}g_{33}, \end{aligned} \qquad (22)$$

$$V_{1212} = \frac{r_g}{2\kappa(r - r_g)} = \frac{1}{2}V(r)g_{11}g_{22}, \qquad (23)$$

$$V_{1313} = \frac{r_g\sin^2\vartheta}{2\kappa(r - r_g)} = \frac{1}{2}V(r)g_{11}g_{33}, \qquad (24)$$

$$V_{2323} = -\frac{r_g r}{\kappa}\sin^2\vartheta = -V(r)g_{22}g_{33}, \qquad (25)$$

где

$$V(r) = \frac{r_g}{\kappa r^3} = \frac{m}{4\pi r^3} = -\frac{m}{8\pi}\frac{\partial}{\partial r}(r^{-2}). \qquad (26)$$

Мы видим, что 2-индексная свёртка этого тензора обращается в нуль:

$$V_{il} = g^{km}V_{iklm} = g_{il}[-V(r) + \frac{1}{2}V(r) + \frac{1}{2}V(r)] = 0. \qquad (27)$$

Физические компоненты тензора энергии-импульса гравитационного поля $V^{ik}_{..lm} = g^{ip}g^{kq}V_{pqlm}$ равны:

$$V^{01}_{..01} = V^{10}_{..10} = V^{23}_{..23} = V^{32}_{..32} = -V(r), \tag{28}$$

$$\begin{gathered} V^{02}_{..02} = V^{20}_{..20} = V^{03}_{..03} = V^{30}_{..30} = V^{12}_{..12} = \\ = V^{21}_{..21} = V^{13}_{..13} = V^{31}_{..31} = \frac{1}{2}V(r). \end{gathered} \tag{29}$$

Они позволяют нам вычислять один из компонентов интеграла энергии-импульса гравитационного поля вокруг статического сферического источника как:

$$cP^{(g)1}_{.01} = \int dS_0\sqrt{-g}V^{01}_{..01} = \int dS_0\sqrt{-g}[-V(r)]. \tag{30}$$

Пространственный объемный интеграл может быть представлен как пространственный поверхностный интеграл и мы получаем:

$$cP^{(g)1}_{.01} = \frac{m}{8\pi}\int dS_0\sqrt{-g}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^{-2}) = \frac{m}{8\pi}\int df_{0r}r^{-2} = \frac{1}{2}n_r m, \tag{31}$$

где $2\,df_{0r} = n_r r^2 do$ есть 2-мерный элемент площади поверхности с нормальным вектором n_r, направленный вдоль r .

Литература

1. Закир З. (2010) *Теор.физ.,астрофиз. и космол.* **5**, 2, 15; (1999); arXiv:gr-qc/9905009
2. Закир З. (2010) *Теор.физ.,астрофиз. и космол.* **5**, 2, 19; (1999); arXiv:gr-qc/9905036