Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **5**, N 2, с. 19 – 22, в1, 9 ноября 2010
Электрон.: ТФАК: 3600-018 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.3600-018

Тензоры энергии-импульса с 4 индексами для гравитации и вещества[1]

Захид Закир [2]

Аннотация

На базе новых уравнений для гравитационного поля с тензором Римана анализируются 4-индексные тензоры энергии-импульса для гравитации и материи. Обсуждены некоторые свойства так определенной гравитационной энергии.

PACS: 04.20.Cv, 04.20.Fy, 11.10.-z
Ключевые слова: гравитационная энергия, кривизна, энергия вакуума

Содержание

Введение

В общей теории относительности истинной и ковариантной характеристикой гравитационного поля является тензор кривизны Римана R_{iklm}, но уравнения поля содержат только тензор Риччи, обращающийся в нуль вне источника. Вейлевский тензор C_{iklm}, который является неисчезающей в вакууме чисто 4-индексной частью R_{iklm}, исчезает при 2-индексной свёртке [1]. Этот факт приводил к проблемам с определением энергии-импульса для гравитационного поля.

В статье [1] была сформулирована новая обобщенная версия уравнений Эйнштейна с тензором Римана. Было показано, что могут быть построены 4-индексные тензоры энергии-импульса для гравитации и материи. В данной статье обсуждаются структура новых гравитационных уравнений и свойства 4-индексных тензоров энергии-импульса.

1. Функция действия и уравнения поля с тензором Римана

Мы стартуем со стандартного действия Эйнштейна-Гильберта для гравитационного поля, записывая его в 4-индексной форме:

---

[1] Препринт статьи была представлен в 1999 (исправлен в 2003): Zakir Z. (1999) arXiv: gr-qc/9905036

[2] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан*, zahidzakir@theor-phys.org

$$S = \frac{1}{2}\int d\Omega\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{\kappa}R + L\right) = \\ = -\frac{1}{2}\int d\Omega\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa}(g^{il}g^{km} - g^{im}g^{kl})R_{iklm} - L\right], \tag{1}$$

где $\kappa = 8\pi k / c^4$. Вариационную процедуру выполним так, чтобы сохранить R_{iklm} в её 4-индексной форме. Результат такой вариации есть [1]:

$$\delta S_g = -\frac{1}{2}\int d\Omega\sqrt{-g}\delta g^{km}g^{il}[G_{iklm} - T_{iklm}] = 0. \tag{2}$$

Здесь новые 4-индексные тензоры определены как ($d = 4$):

$$G_{iklm} = \frac{1}{\kappa}\left[R_{iklm} - \frac{1}{6}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})R\right], \\ T_{iklm} = V_{iklm} + \frac{1}{2}(g_{km}T_{il} - g_{kl}T_{im} + g_{il}T_{km} - g_{im}T_{kl}) - \\ -\frac{1}{6}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})T, \tag{3}$$

где тензор V_{iklm}, имеющий свойство $g^{il}V_{iklm} = 0$, не обращается в нуль в вакууме вокруг источника и может быть идентифицирован с искомым тензором плотности энергии-импульса гравитационного поля. Уравнения поля в общем случае есть:

$$G_{iklm} = T_{iklm}. \tag{4}$$

Тензоры G_{iklm} и T_{iklm} имеют такие же свойства симметрии, как и тензор Римана и поэтому мы имеем 20 уравнений. Тензор G_{iklm} есть функция метрического тензора, g_{ik}, который имеет 6 независимых компонент. Тензор $T^{(m)}_{iklm}$ составлен из обычного тензора энергии-импульса вещества T_{ik}, содержащего 4 независимых функций (плотность энергии ε и 3 компоненты скорости). Эти 10 функций - это решения 10 уравнений Эйнштейна (6 для независимых компонент метрики и 4 для независимых компонент T_{ik}). У нового члена V_{iklm} есть ещё 10 независимых компонент.

Итак, мы имеем 20 уравнений для 20 независимых функций. Если мы берём решения уравнений Эйнштейна для некоторой метрики и T_{ik}, то у нас есть еще 10 уравнений для 10 компонент V_{iklm}. Это означает, что решения уравнений Эйнштейна точно определяют все компоненты V_{iklm} и мы можем найти V_{iklm} для некоторой стандартной метрики. Но если мы имеем некоторую модель вакуума и вычисляем V_{iklm} в этой модели, тогда у нас будут 10 уравнений для 10 неизвестных компонент метрики g_{ik} и T_{ik}. В вакууме G_{iklm} содержит только вейлевский тензор C_{iklm} и у нас есть уравнения для гравитационного поля (6).

2. Сохранение энергии-импульса для системы гравитации и материи

Тензор Римана может быть представлен как:

$$R_{iklm} = C_{iklm} + \frac{1}{2}(g_{km}R_{il} - g_{kl}R_{im} + g_{il}R_{km} - g_{im}R_{kl}) - \\ -\frac{1}{6}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})R \tag{5}$$

где C_{iklm} тензор Вейля с нулевым 2 индексной свёрткой $g^{il}C_{iklm} = 0$. В вакууме $T_{ik} = T = 0, R_{il} = R = 0$ и мы имеем:

$$\frac{1}{\kappa}C_{iklm} = V_{iklm}. \tag{6}$$

Ковариантные производные этих 4-индексных тензоров равны:

$$G^{i}_{.klm;i} = \frac{1}{\kappa}\left[R^{i}_{.klm;i} - \frac{1}{6}(g_{km}R_{,l} - g_{kl}R_{,m})\right] = \\ = T_{km;l} - T_{kl;m} - \frac{1}{3}(g_{km}T_{,l} - g_{kl}T_{,m}), \\ T^{j(m)}_{klm;j} = \frac{1}{2}\left[T_{km;l} - T_{kl;m} - \frac{1}{3}(g_{km}T_{;l} - g_{kl}T_{;m})\right] = \frac{1}{2}G^{i}_{.klm;i}. \tag{7}$$

Тогда мы получаем соотношения:

$$V^{j}_{klm;j} = G^{j}_{klm;j} - T^{j(m)}_{klm;j} = \frac{1}{2}G^{i}_{.klm;i}. \tag{8}$$

и поэтому

$$V^{j}_{klm;j} = T^{j(m)}_{klm;j} \tag{9}$$

В вакууме, в результате, имеют место локальные законы сохранения:

$$G^{j}_{\cdot klm;j} = V^{j}_{klm;j} = 0. \tag{10}$$

Интегральные тензоры энергии-импульса для вещества и гравитации могут быть определены как:

$$P^{(m)}_{ikl} = \int dS_n\sqrt{-g}\,T^{n(m)}_{.ikl}, \\ V_{ikl} = \int dS_n\sqrt{-g}\,V^{n}_{.ikl}. \tag{11}$$

На гиперповерхности $x^0 = const$ имеем:

$$P^{(m)}_{ikl} = \int d^3x\sqrt{-g}\,T^{0(m)}_{.ikl}, \\ V_{ikl} = \int d^3x\sqrt{-g}\,V^{0}_{.ikl}. \tag{12}$$

Мы можем построить тензор углового момента:

$$M^{ilkm} = \int dS_n\sqrt{-g}(x^m V^{nikl} - x^i V^{nmkl}). \tag{13}$$

Этот 4-индексный тензор может интерпретироваться как *тензор углового момента* для гравитационного поля.

3. Сравнение с псевдотензорным и гамильтоновым подходами

Псевдотензор t_{ik}, например, в версии Ландау-Лифшица, был определен как часть тензора Эйнштейна:

$$G^{ik} = \frac{1}{(-g)}\frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - t^{ik}. \tag{14}$$

Такое разделение приводит к сохранению суммы t^{ik} и T^{ik}:

$$\int dS_k(-g)(T^{ik} + t^{ik}) = \int dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l}, \tag{15}$$

и правый член тогда может интерпретироваться как полная энергия системы.

Таким образом, если мы хотим работать с локализуемой и тензорной формой гравитационной энергии-импульса в вакууме, мы можем взять тензор Вейля с нулевой 2-индексной свёрткой. Если же мы хотим работать с ненулевой 2-индексной формой гравитационной энергии-импульса, мы берём псевдотензоры или гамильтонианы, которые нелокализуемы и нековариантны.

4. Геодезическое отклонение и измерения гравитационной энергии

Уравнение геодезического отклонения:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i_{klm}u^k u^l \eta^m \tag{16}$$

в вакууме переписываем в виде:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = C^i_{klm}u^k u^l \eta^m = \kappa V^i_{klm}u^k u^l \eta^m. \tag{17}$$

Отсюда мы заключаем, что измерения геодезических отклонений в точности есть измерения 4-индексного тензора энергии-импульса гравитационного поля V^i_{klm}.

В [2] будет рассмотрена энергия для стандартных метрик и некоторые следствия предложенной трактовки гравитационной энергии.

Литература

1. Закир З. (2010) *Теор.физ.,астрофиз. и космол.* **5**, 2, 15; (1999); arXiv:gr-qc/9905009
2. Закир З. (2010) *Теор.физ.,астрофиз. и космол.* **5**, 2, 23; (1999); arXiv:gr-qc/9906039