Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **5**, N 2, с. 15 – 18, в1, 9 ноября 2010

Электрон.: ТФАК: 3600-017 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.3600-017

Новые уравнения для гравитации с тензором Римана и 4-индексные тензоры энергии-импульса для гравитации и материи[1]

Захид Закир [2]

Аннотация

Получена обобщённая версия уравнений Эйнштейна в 4 индексной форме, включающей линейно тензор кривизны Римана. Показано, что плотность гравитационной энергии-импульса вне источника представлена через тензор Вейля, обращающийся в нуль при свёртывании до 2 индексов. Также построен 4-индексный тензор плотности энергии-импульса материи.

PACS: 04.20.Cv, 04.20.Fy, 11.10.-z
Ключевые слова: гравитационная энергия, кривизна, энергия вакуума

Содержание

Введение

Определение энергии-импульса для поля тяготения - более сложная процедура, чем для материи [1]. Из-за исчезновения вне источника тензора Эйнштейна G_{ik} :

$$G_{ik} = \frac{1}{\kappa}(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R) = 0, \tag{1}$$

его нельзя трактовать непосредственно как плотность энергии-импульса для гравитации.

Стандартные методы асимптотически-плоского пространства-времени приобретают смысл только на больших расстояниях от источника. В частности, введение псевдотензоров приводит к трудностям, которые не удалось преодолеть. Даже такая строгая трактовка гравитационной энергии, как гамильтонова формулировка, ведёт к заключению о его нелокальности из-за нетензорной природы её наблюдаемых (см. [2]).

В то же время тензор кривизны R_{iklm} можно рассматривать как истинную характеристику гравитации с большим основанием, чем все прочие наблюдаемые. Поэтому объяснение утверждения о нелокализуемости гравитационной энергии принципом эквивалентности является некорректным из-за локального и ковариантного характера тензора кривизны, появляющегося в теории также из-за этого принципа.

---

[1] Препринт статьи была представлен в 1999 (исправлен в 2003): Zakir Z. (1999) arXiv:gr-qc/9905009

[2] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан*, zahidzakir@theor-phys.org

В данной статье будет сформулирована обобщённая версия уравнений Эйнштейна, непосредственно содержащих тензор Римана. Действительно, тензор G_{ik}, обращающийся в нуль в вакууме, фактически является свёрткой необращающегося в нуль тензора с 4 индексами:

$$g^{il}G_{iklm} = G_{km} = 0. \qquad (2)$$

В статье мы получим G_{iklm} из функции действия Эйнштейна-Гильберта как:

$$G_{iklm} = \frac{1}{\kappa}\left[R_{iklm} - \frac{1}{2(d-1)}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})R\right], \qquad (3)$$

где d - размерность пространства-времени, и затем получим 4-индексные гравитационные уравнения:

$$G_{iklm} = T_{iklm}. \qquad (4)$$

Здесь 4-индексный тензор плотности энергии-импульса источника T_{iklm} определён как:

$$T_{iklm} = V_{iklm} + T^{(m)}_{iklm}, \qquad (5)$$

где $T^{(m)}_{iklm}$ соответственным образом симметризованная комбинация стандартного тензора плотности энергии-импульса материи T_{ik} и его скаляра T. Здесь V_{iklm} - новый чисто 4-индексный тензор плотности энергии-импульса со свойством $g^{il}V_{iklm} = 0$, который не обращается в нуль вне источника (в вакууме) и поэтому может интерпретироваться как *плотность* энергии-импульса *поля тяготения*.

В вакууме G_{iklm} содержит только тензор Вейля C_{iklm} и мы имеем уравнения для поля тяготения:

$$\frac{1}{\kappa}C_{iklm} = V_{iklm}. \qquad (6)$$

Функция действия и уравнения поля с тензором Римана

Гравитационные уравнения мы получаем из функции действия Эйнштейна-Гильберта:

$$S = \int d\Omega\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2\kappa}R + L\right), \qquad (7)$$

где L - функция Лагранжа материи. Вариация геометрического члена может быть представлена как:

$$\delta S_g = -\frac{1}{4\kappa}\delta_g\int d\Omega\sqrt{-g}(g^{il}g^{km} - g^{im}g^{kl})R_{iklm}. \qquad (8)$$

Зависимости:

$$g^{il}\delta R_{il} = g^{il}\delta(g^{km}R_{iklm}) = g^{il}\delta g^{km}R_{iklm} + g^{il}g^{km}\delta R_{iklm}, \qquad (9)$$

позволяют переписать вариации δR_{iklm} в виде:

$$g^{il}g^{km}\delta R_{iklm} = -g^{il}\delta g^{km}R_{iklm} + g^{il}\delta R_{il}. \qquad (10)$$

Тогда, принимая во внимание формулы:

$$\delta(\sqrt{-g})R = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\delta g^{km}g_{km}R = \\ = \sqrt{-g}\delta g^{km}g^{il}\left[-\frac{1}{2(d-1)}(g_{km}g_{il} - g_{kl}g_{im})R\right], \tag{11}$$

получаем:

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\kappa}\int d\Omega\sqrt{-g}(G_{iklm}g^{il})\delta g^{km}, \tag{12}$$

где G_{iklm} представлен в (3).

Тензор Римана может быть представлен как:

$$R_{iklm} = C_{iklm} + \frac{1}{(d-2)}(g_{km}R_{il} - g_{kl}R_{im} + g_{il}R_{km} - g_{im}R_{kl}) + \\ -\frac{1}{(d-1)(d-2)}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})R, \tag{13}$$

где C_{iklm} имеет свойство $g^{il}C_{iklm} = 0$. Если $C_{iklm} = 0$, то такое многообразие является конформно плоским.

Мы вводим соответствующий 4-индексный тензор плотности энергии-импульса для источника с такими же свойствами симметрии, как и R_{iklm}, в виде:

$$T_{iklm} = V_{iklm} + T^{(m)}_{iklm}. \tag{14}$$

Здесь V_{iklm} является чисто 4-индексным тензором плотности энергии-импульса источника с обращающейся в нуль свёрткой и $T^{(m)}_{iklm}$ построен из 2-индексного тензора плотности энергии-импульса материи T_{km} и его скаляра как:

$$T^{(m)}_{iklm} = \frac{1}{(d-2)}(g_{km}T_{il} - g_{kl}T_{im} + g_{il}T_{km} - g_{im}T_{kl}) - \\ -\frac{T}{(d-1)(d-2)}(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}), \\ T = g^{km}T_{km} = \frac{1}{2}(g^{il}g^{km} - g^{im}g^{kl})T_{iklm}. \tag{15}$$

Далее для вариации функции действия источника мы имеем:

$$\delta_g S_m = \frac{1}{2}\int d\Omega\sqrt{-g}\,\delta g^{km}g^{il}T_{iklm}. \tag{16}$$

Результатом вариационной процедуры, в результате, является:

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d\Omega\sqrt{-g}\delta g^{km}g^{il}\quad G_{iklm} - T_{iklm}\quad . \tag{17}$$

который даёт уравнения поля:

$$g^{il}(G_{iklm} - T_{iklm}) = 0. \tag{18}$$

В результате, мы получаем 4-индексное обобщение уравнений гравитационного поля в виде:

$$G_{iklm} = T_{iklm}, \tag{19}$$

или:

$$\frac{1}{\kappa}\left[R_{iklm}-\frac{1}{2(d-1)}(g_{il}g_{km}-g_{im}g_{kl})R\right]=T_{iklm}. \tag{20}$$

Ковариантные производные этих 4-индексных тензоров в случае $d=4$ равны:

$$\begin{aligned} G^{i}_{.klm;i} &= \frac{1}{\kappa}\left[R^{i}_{.klm;i}-\frac{1}{6}(g_{km}R_{,l}-g_{kl}R_{,m})\right]= \\ &= T_{km;l}-T_{kl;m}-\frac{1}{3}(g_{km}T_{,l}-g_{kl}T_{,m}), \\ T^{j(m)}_{klm;j} &= \frac{1}{2}\left[T_{km;l}-T_{kl;m}-\frac{1}{3}(g_{km}T_{;l}-g_{kl}T_{;m})\right]=\frac{1}{2}G^{i}_{.klm;i}. \end{aligned} \tag{21}$$

Тогда мы получаем зависимость:

$$V^{j}_{klm;j}=G^{j}_{klm;j}-T^{j(m)}_{klm;j}=\frac{1}{2}G^{i}_{.klm;i}. \tag{22}$$

В вакууме, в результате, имеют место локальные законы сохранения:

$$G^{j}_{\cdot klm;j}=V^{j}_{klm;j}=0. \tag{23}$$

Заключение

Важнейшая часть тензора Римана - это тензор Вейля C_{iklm}, который фактически определяет гравитационное поле вне источника. Эта часть тензора Римана обычно терялась при свёртке до двух индексов и это являлось причиной трудностей с определением гравитационной энергии.

В статье показано, что 4-индексный тензор энергии-импульса материи должен содержать дополнительный чисто 4-индексный член V_{iklm}, который имеет все требуемые свойства тензора энергии-импульса для гравитационного поля. Обсуждение некоторых приложений этой новой трактовки гравитационной энергии и её связей с другими определениями будет приведено в последующих статьях.

Литература

1. Einstein A. (1918) Sitz.preuss.Akad.Wiss. v.1, p.448.
2. Фаддеев Л.Д. (1982) УФН, **136**, 435.