Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **4**, N 1, с. 1 – 6, в1, 19 марта 2009

Электрон.: ТФАК: 3000-012 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.3000-012

Теория стохастического пространства-времени. 1. Гравитация как квантовая диффузия[1]

Захид Закир [2]

Аннотация

Нельсоновская стохастическая механика *неоднородной* квантовой диффузии в плоском пространства-времени с тензором диффузии может быть описана как *однородная* диффузия в римановом многообразии, где этот тензор диффузии играет роль метрического тензора, умноженного на коэффициент диффузии. Показано, что такая диффузия ускоряет пробную частицу и локальную систему отсчёта таким образом, что их среднее ускорение не зависит от их масс. Этот факт, объясняя принцип эквивалентности, позволяет представить кривизну и гравитацию как следствия неоднородностей квантовых флуктуаций. В такой диффузионной трактовке гравитации естественно объясняется тот факт, что плотность энергии мгновенного ньютоновского взаимодействия является отрицательно определённой.

PACS: 04.20.Cv, 03.65.Ta, 05.40.Jc, 04.62.+v
Ключевые слова: стохастическая механика, тензор диффузии, квантовые флуктуации, гравитация, кривизна

Содержание

Введение

Два основных явления физики - гравитация и квантовые флуктуации - зависят только от масс объектов и оба имеют геометрическую природу. Геометрическое происхождение гравитации известно, в то время как до сих пор открытая Нельсоном [1] стохастическая геометрия пространства-времени не принята как одна из фундаментального концепций физики. Стохастическая механика является единственной версией квантовой механики, где квантовые флуктуации представлены как проявления стохастической геометрии пространства-времени с *постоянным* коэффициентом диффузии $\nu_0 = \hbar / 2m$ (см. также обзор [2]).

В этой связи естественно рассмотреть более общий случай пространства-времени с *неоднородной* диффузией с тензором диффузии $\nu^{ab}(x,t)$. В статье будет

---

[1] Препринт статьи был представлен в 1998 г.: Zakir Z. (1998) arXiv:hep-th/9812254
[2] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент Узбекистан*, zahidzakir@theor-phys.org

показано, что стохастическая структура пространства-времени с таким тензором диффузии индуцирует нетривиальную метрику $g^{ab}(x,t)$ и кривизну. Это означает, что гравитацию можно трактовать как квантово-диффузионный эффект.

Тот факт, что квантовые флуктуации и гравитация не являются независимыми явлениями, приводит к интересному решению проблемы гравитационной энергии. Известно, что плотность энергии мгновенного ньютоновского взаимодействия, как только притягивающего, отрицательно-определённая. В диффузионной трактовке гравитации это свойство может быть естественно объяснено.

1. Стохастическая механика однородной диффузии

Пусть имеет место нельсоновская диффузия [1] нерелятивистской частицы массы m в евклидовом пространстве R^n:

$$dx_\pm^a(t) = b_\pm^a(x,t)dt + dw_\pm^a(t), \tag{1}$$

с

$$\lim_{\Delta t\to 0} E[\Delta w_\pm^a(t) \mid x^a(t)] = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} E[\Delta w_\pm^a(t)\Delta w_\pm^b(t) \mid x^a(t)] = \pm 2\nu_0\delta^{ab}dt. \tag{3}$$

Здесь коэффициент диффузии взят как $\nu_0 = \hbar/2m$, где $\hbar$ планковская константа, $\Delta w_\pm^a(t) = w^a(t\pm\Delta t) - w^a(t)$, и предел $\Delta t \to 0$ должен быть взят только после вычисления условных математических ожиданий $E[...\mid x^a(t)]$. Сдвиговые скорости:

$$b_\pm^a(x,t) = \lim_{\Delta t\to 0} E\left[\frac{\Delta x_\pm^a(t)}{\pm\Delta t} \mid x^a(t)\right], \tag{4}$$

позволяют определять дрейфовую (v^a) и осмотическую (u^a) скорости:

$$v^a = \frac{1}{2}(b_+^a + b_-^a), \quad u^a = \frac{1}{2}(b_+^a - b_-^a). \tag{5}$$

Ускорение определено как:

$$\begin{aligned} a^a(x,t) &= \frac{1}{2}(D_+D_- + D_-D_+)x^a(t) = \\ &= \frac{\partial v^a}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)v^a - (\mathbf{u}\nabla)u^a - \nu_0\Delta u^a, \end{aligned} \tag{6}$$

где стохастические производные по времени $D_\pm$ есть:

$$\begin{aligned} D_\pm f &= \lim_{\Delta t\to 0} E\left[\frac{f[x(t\pm\Delta t), t\pm\Delta t] - f(x,t)}{\pm\Delta t} \mid x^a(t)\right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{b}_\pm\nabla)f \pm \nu_0\Delta f. \end{aligned} \tag{7}$$

Средние траектории свободных классических частиц с дрейфовой скоростью $\mathbf{v}$ есть диффузионные геодезические линии в R^n. Уравнение движения для них во внешнем поле - это уравнение Ньютона:

$$m\mathbf{a} = -\nabla V. \tag{8}$$

Среднее значение ускорения есть:

$$E[a^b(t)] = \int dx \rho(x,t)\, a^b(x,t) = \int dx \rho \left[\frac{\partial v^b}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v^b \right] \rho, \tag{9}$$

которое для ньютоновского потенциала ϕ_N даёт:

$$E\left[\frac{\partial v^b}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) v^b \right] = -\nabla^b \phi_N. \tag{10}$$

Здесь среднее ускорение пробной частицы в статическом поле тяготения ϕ_N не зависит от массы этой частицы в соответствие с принципом эквивалентности.

2. Стохастическая механика неоднородной диффузии

Рассмотрим в R^n общую диффузию с тензором диффузии:

$$\nu_{ab}(x,t) = \nu_0 \gamma_{ab}(x,t), \tag{11}$$

где γ_{ab} нормализованный тензор диффузии, который в случае однородной нельсоновской диффузии был взят как: $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$. Средние траектории частиц в этом общем случае есть не геодезические линии в R^n, а содержат некоторые отклонения от геодезических. Для описания общей диффузии мы вводим криволинейные координаты $x^i(x^a,t)$ *и базисные векторы* e_i^a *вдоль средних траекторий свободных частиц*. Тогда для локальных физических координат пробной частицы в точке M имеем:

$$dx^i(M,t) = e_a^i(M,t) dx^a(M,t), \tag{12}$$

$$dx_\pm^a(t) = b_\pm^a(x,t)dt + dw_\pm^a(t), \tag{13}$$

где $e_i^a e_i^b = \delta^{ab}$, $e_i^a e_j^a = g_{ij}$ и $g^{ab} = e_i^a e_j^b g^{ij}$ есть метрика плоского пространства-времени R^n, $g^{ij}(x,t)$ является метрическим тензором многообразия M с криволинейными координатами x^i, которые сформировали средние траектории дрейфовой скорости $v^i(x,t)$ при свободной диффузии:

$$dx_\pm^i(t) = b_\pm^i(x,t)dt + d[e_a^i(x,t) w_\pm^a(t)]. \tag{14}$$

Тогда условные математические ожидания могут быть определены в терминах этих криволинейных координат только для малых временных интервалов Δt и вдоль кусочно-гладкой кривой, аппроксимирующей случайные кривые около точки M . Соответствующий тензор диффузии определён как:

$$\nu^{ij}(x,t) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \to 0} E_\gamma \left[\frac{\Delta x_\pm^i(t) \Delta x_\pm^j(t)}{\pm \Delta t} \,|\, x^i(t) \right] = \nu_0 \gamma^{ij}(x,t). \tag{15}$$

Теперь мы введём новый тип параллельного перенесения тензоров - стохастическое *параллельное перенесение* в плоском пространстве-времени *вдоль средней траектории свободного дрейфа*:

$$de_a^i(x,t) = -\Gamma_{ml}^i e_a^l dx^m(t) - \frac{1}{2} d[\Gamma_{ml}^i e_a^l] dx^m(t). \tag{16}$$

Такая неоднородная диффузия может быть описана как однородная в римановом многообразии с постоянным коэффициентом диффузии $\nu_0 = const$ и с метрическим тензором $g^{ij}(x,t)$, отождествляемым с нормализованным тензором диффузии $\gamma^{ij}(x,t) = g^{ij}(x,t).$ Стохастическую механику с тензором диффузии тогда можно трактовать как квантовую механику в римановом многообразии. Поэтому, можно использовать известные формулы стохастической механики в искривлённых многообразиях [3].

Стохастические производные по времени имеют вид:

$$(D_\pm F)^i(x,t) = \frac{\partial F^i}{\partial t} + (\mathbf{b}_\pm \boldsymbol{\nabla})F^i \pm \nu_0(\Delta_{DR}F)^i, \tag{17}$$

где ∇ - оператор Лапласа-Бельтрами в искривлённом многообразии,

$$(\Delta_{DR}F)^i = \Delta F^i + R^i_j F^j. \tag{18}$$

- оператор Лапласа-де-Рама, $\Delta = \boldsymbol{\nabla\nabla}$ и R^i_j - тензор Риччи.

Из выражения для ускорения

$$a^i(x,t) = \frac{1}{2}(D_+b_- + D_-b_+)^i(x,t) = -\frac{1}{m}\nabla^i V \tag{19}$$

и (8) получаем уравнения движения:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})v^i - (\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla})u^i - \nu_0 \Delta u^i - \nu_0 R^i_j F^j = -\frac{1}{m}\nabla^i V. \tag{20}$$

Уравнение непрерывности для плотности вероятности $\rho(x,t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0, \tag{21}$$

даёт $u^i = \nu_0(\nabla^i \rho)/\rho.$ Тогда с помощью предположений Нельсона [1] $mv^i = \nabla^i S$, $\nu_0 = \hbar/2m$ и:

$$\psi(x,t) = \sqrt{\rho(x,t)}\exp[iS(x,t)/\hbar], \tag{22}$$

где $S(x,t)$ некая функция, а $\psi(x,t)$ - волновая функция, мы получаем уравнение Шредингера для движения частицы в стохастическом пространстве с тензором диффузии [1,3]:

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi. \tag{23}$$

3. Гравитация, индуцированная диффузией

Среднее значение ускорения не содержит членов с осмотической скоростью u^i и, хотя нет каких-либо внешних полей, тем не менее, здесь имеет место некое *ускорение* из-за присутствия производных метрики в операторе Лапласа-Бельтрами $\boldsymbol{\nabla}$:

$$E\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})v_i\right] = 0, \tag{24}$$

которое означает что:

$$E\left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^j \partial_j v_i\right] = E\left[\Gamma^k_{ij} v^j v_k\right]. \tag{25}$$

Это *индуцированное диффузией среднее ускорение не содержит явную зависимость от массы* частицы, т.е. мы имеем аналог принципа эквивалентности в случае гравитации.

Стохастическая механика была естественным образом обобщена на случай релятивистской частицы [4]. В этом случае мы получаем нетривиальную метрику для пространства-времени, которую можем интерпретировать как гравитацию, индуцированную диффузией. Другими словами, неоднородная диффузия приводит к ускорению частицы точно так же, как некое эффективное поле тяготения.

Очень важно то, что независимость ускорения от массы пробной частицы ведёт также *к такому же собственному ускорению макроскопических объектов – базисов локальных инерциальных систем отсчёта*. Ускорение же системы отсчёта означает появление нетривиальной метрики и ненулевой кривизны. Уравнения Эйнштейна для кривизны и метрического тензора тогда могут быть представлены как уравнения для тензора диффузии.

Идентификация метрической структуры пространства-времени с общей диффузией приводит к интерпретации гравитации как вторичного эффекта квантовых флуктуаций.

В стохастической интерпретации гравитации уравнения для метрики $g_{ij}(x,t)$ могут быть получены из уравнений диффузии. Гравитация есть эффект энергии-импульса и мы имеем дело с некоторым аналогом *термодиффузии*, где диффузионный поток $\mathbf{j}$ направлен против градиента вакуумной плотности энергии в пространстве:

$$\mathbf{j} = -\alpha \cdot \nabla \rho_{(0)}, \tag{26}$$

где некоторая α константа. Пусть пробная частица находится в покое на большом расстоянии от источника, где плотность энергии вакуума равна $\rho_{(0)1}$. Из-за неоднородной диффузии, частица будет продвигаться к массивному источнику, где плотность энергии вакуума $\rho_{(0)2}$. Диффузия приводит к дрейфу пробной частицы от интенсивно флуктуирующей области вакуума к области с меньшей интенсивностью флуктуаций. Поэтому, для *притягивающей диффузии* разность плотностей энергии $\delta\rho_{2-1} = \rho_{(0)2} - \rho_{(0)1}$ должна быть отрицательной $\delta\rho_{2-1} < 0$.

Поэтому, если мы интерпретируем гравитацию как такой диффузионный процесс, то плотность энергии, соответствующая гравитационной силе и ассоциируемая с $\delta\rho_{2-1}$, должна быть отрицательно определённой. Тот факт, что плотность энергии мгновенного ньютоновского взаимодействия отрицательно-определённая, хорошо известно и мы можем трактовать это свойство гравитации как одно из свидетельств его диффузионного происхождения. Здесь тензор плотности энергии-импульса вещества T_{ij} играет роль источника для деформаций стохастической структуры пространства-времени.

Таким образом, имеет место некоторый *дуализм* между деформациями стохастической структуры и римановой структурой пространства-времени.

Заключение

Главный результат настоящей статьи – это тот факт, что квантовые флуктуации индуцируют гравитацию и что гравитацию можно трактовать как макроскопический остаточный эффект от неоднородных квантовых флуктуаций. Этот результат очень важен не только для понимания физической природы гравитации, но также и для стратегии построения объединённых теорий. Если, как в стохастической трактовке, гравитация и квантовые флуктуации не являются независимыми явлениями, то становится ясным, что объединённые теории должны привести к объяснению этого фундаментального факта.

В следующей статье [6] будет показано, что стохастические трактовки квантовой теории и гравитации являются не просто некими гипотезами, а могут рассматриваться как следствия некоторых общих принципов инвариантности.

Литература

1. Nelson E. (1966) *Phys.Rev.*, **150**, p. 1079.
2. Blanchard Ph., Combe Ph., Zheng W. (1987) *Mathematical and Physical Aspects of Stochastic Mechanics*, Lect.Not. in Phys., **281**, 171 p.
3. Dohrn D., Guerra F. (1978) *Lett. Nuovo Cim.*, **22**, 4, p. 121.
4. Guerra F., Ruggiero P. (1978) *Lett. Nuovo Cim.*, **23**, 15, p. 529.
5. Smolin L. (1986) *Phys.Lett.*, **113A**, N 8, p. 408.
6. Закир З. (2009) *Теор. физ., астрофиз. и космол.*, **4**, 2, 11;
(1999) arXiv:hep-th/9901013.