Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **3**, N 1, с. 1 – 9, в1, 4 марта 2008

Электрон.: ТФАК: 2620-009 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.2620-009

Квантование релятивистских полей без нулевой энергии 2. Векторные и спинорные поля.

Захид Закир [1]

Аннотация

Новый метод *C*- и *CP*-симметричного квантования полей применён для спинорного, комплексного векторного и электромагнитного полей. Показано, что связи, налагаемые условиями дискретных симметрий на билинейные произведения операторов рождения-уничтожения приводят к операторам наблюдаемых в нормально-упорядоченном виде без нулевой энергии и нулевого заряда.

PACS: 03.70.+k, 11.30.Er

Ключевые слова: квантовые поля, зарядовое сопряжение, чётность

Содержание

Введение

В предыдущих статьях [1] была предложена новая версия метода квантования систем с зарядовой (*C*-) симметрией. При этом, в отличие от первоначальной версии метода [2], были использованы только операторы рождения-уничтожения положительно-частотных состояний. Рассматривалось квантование системы, представляемой как осциллятор с комплексными обобщёнными координатами, а затем новый метод был применён к квантованию комплексного скалярного поля.

Предложенная модификация стандартных процедур канонического квантования основана на более последовательном учёте ограничений, следующих из базовых дискретных симметрий. Основной новый факт, использованный в [1,2] состоит в том, что операторы рождения-уничтожения античастиц, *определяемые* как зарядово-сопряжённые к операторам частиц, *не совпадают* с операторами в импульсном разложении полей, которые ранее интуитивно отождествлялись с первыми.

Принципиально новыми результатами являются то, что:

1) основное состояние *C*-симметричных систем не содержит нулевой энергии и нулевого заряда;

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики*,*Ташкент, Узбекистан;* zahidzakir@theor-phys.org

2) это согласуется с обобщением соотношения неопределённостей для систем с неэрмитовыми каноническими переменными;

3) пропагаторами для квантов таких систем можно выбрать не фейнмановский, а запаздывающий (частицы) и опережающий (античастицы) пропагаторы.

В данной статье, являющейся продолжением [2], в разделах 1 и 5 рассмотрено *C*-симметричное квантование массивных векторного и спинорного полей. Далее рамки нового метода расширены и включены ограничения, следующие также и из киральной симметрии систем. Это позволило показать в разделах 2-3 отсутствие нулевой энергии и для нейтральных полей - электромагнитного поля и неабелевых калибровочных полей, квантуемых в спиральном базисе.

1. *C*-симметричное квантование комплексного векторного поля

Комплексное векторное поле разлагается по полевым модам также, как и комплексное скалярное поле, но с учётом вектора поляризации:

$$\begin{aligned} B_\mu(x) &= \sum_{\mathbf{k}\lambda}\left(a_{k\lambda}\varepsilon^{\lambda}_{\mu k}e^{-ikx} + \beta^*_{\lambda k}\varepsilon^{\lambda *}_{\mu k}e^{ikx}\right), \\ B^*_\mu(x) &= \sum_{\mathbf{k}\lambda}\left(a^*_{k\lambda}\varepsilon^{\lambda *}_{\mu k}e^{ikx} + \beta_{\lambda k}\varepsilon^{\lambda}_{\mu k}\, e^{-ikx}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Поскольку уравнения для свободного поля линейны, то в каждой системе отсчёта три состояния поляризации квантуются независимо и аналогичны трём комплексным скалярным полям. Поэтому, опуская детали, приведём только результаты.

При квантовании операторы полевых мод удовлетворяют коммутационным соотношениям, ненулевые из которых имеют вид:

$$\left[a_{k\lambda}, a^*_{k'\lambda'}\right] = \left[\beta_{k\lambda}, \beta^*_{k'\lambda'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{2}$$

Гамильтониан и оператор заряда тогда приобретают вид:

$$\begin{aligned} H &= \sum_\lambda \int d^3k\, H_{k\lambda} = \sum_\lambda \int d^3k\, \omega_k \left(a^*_{k\lambda}a_{k\lambda} + \beta_{k\lambda}\beta^*_{k\lambda}\right), \\ Q &= \sum_\lambda \int d^3k\, Q_{k\lambda} = \sum_\lambda \int d^3k \left(a^*_{k\lambda}a_{k\lambda} - \beta_{k\lambda}\beta^*_{k\lambda}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Вводя зарядово-сопряжённые операторы для полевых мод и используя условия *C*-симметрии для наблюдаемых каждой из поляризаций в отдельности, два произведения вспомогательных операторов $\beta_{k\lambda}\beta^*_{k\lambda}$ и $\alpha_{k\lambda}\alpha^*_{k\lambda}$ выражаем через два произведения зарядово-сопряжённых операторов:

$$\alpha_k\alpha^*_k = a^*_k a_k\,, \qquad \beta_k\beta^*_k = b^*_k b_k\,. \tag{4}$$

Подставив эти тождества в (3), для гамильтониана и оператора заряда комплексного векторного поля получаем стандартные нормально-упорядоченные выражения без нулевой энергии и нулевого заряда:

$$\begin{aligned} H = H_c &= \sum_\lambda \int d^3k\, H_{k\lambda} = \sum_\lambda \int d^3k\, \omega_k \left(a^*_{k\lambda}a_{k\lambda} + b^*_{k\lambda}b_{k\lambda}\right), \\ Q = Q_c &= \sum_\lambda \int d^3k\, Q_{k\lambda} = \sum_\lambda \int d^3k \left(a^*_{k\lambda}a_{k\lambda} - b^*_{k\lambda}b_{k\lambda}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что хотя этот результат получен в фиксированной системе отсчёта, тем не менее, сам факт отсутствия нулевой энергии и нулевого заряда не зависит от системы отсчёта. Это связано с тем, что тензор энергии-импульса вакуума пропорционален скалярной константе Λg_{ik} и, поэтому, если её нет в одной системе отсчёта, то не возникнет и в других.

2. *C*-симметричное квантование электромагнитного поля

При квантовании электромагнитного поля, несмотря на то, что фотоны электрически нейтральны, а поле описывается вещественным векторным потенциалом A_μ, тем не менее также возможно использование свойств дискретных симметрий для исключения нулевой энергии.

Поле фотонов обладает аксиальной симметрией и при круговой поляризации два состояния с противоположными спиральностями ведут себя в точности как два состояния с противоположными зарядами. Гамильтониан и оператор спиральности $\Lambda = \mathbf{S}\cdot\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ (проекция спина на направление импульса) диагональны только при круговой поляризации и поэтому только эта поляризация соответствует чистым состояниям фотонов. В результате, развитый ранее формализм *C*-симметричного квантования практически полностью переносится и на этот случай, но с заменой заряда на спиральность, которая фактически есть киральный заряд фотона.

Оператор спиральности Λ^0 в отсутствие углового момента есть временная компонента дивергенции от оператора полного момента:

$$\Lambda^\mu = \partial_\nu J^{\mu\nu}. \tag{6}$$

Выберем ось x^3 пространственных координат вдоль направления импульса фотона, т.е. $\mathbf{k} = \left(0,0,k^3\right)$ и выберем калибровку, где остаются только поперечные компоненты поля A_1, A_2. Далее из этих двух поперечных компонент поля можно образовать две компоненты со спиральностями $\lambda = \pm 1$, которые являются взаимно комплексно сопряжёнными:

$$A(x) \equiv A_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1 + iA_2\right), \quad A^*(x) \equiv A_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_1 - iA_2\right). \tag{7}$$

Лагранжиан поля тогда приобретает вид:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\int d^3x\left[\left(\partial_\mu A_1\right)\left(\partial^\mu A_1\right) + \left(\partial_\mu A_2\right)\left(\partial^\mu A_2\right)\right] = \\ &= \int d^3x\left(\partial_\mu A^*\right)\left(\partial^\mu A\right) \end{aligned} \tag{8}$$

и ведёт к гамильтониану и оператору спиральности:

$$H = \int d^3x\left[\pi\pi^* + \left(\nabla A^*\right)\cdot\left(\nabla A\right)\right], \tag{9}$$

$$\Lambda = i\int d^3x\left[\pi A - A^*\pi^*\right], \tag{10}$$

$$\pi(x) = \partial_t A^*, \quad \pi^*(x) = \partial_t A. \tag{11}$$

Уравнения поля стандартные:

$$\partial_\mu\partial^\mu A = 0\,, \quad \partial_\mu\partial^\mu A^* = 0\,, \tag{12}$$

а одновременные коммутационные соотношения имеют вид:

$$i\left[\pi(\mathbf{x},t),A(\mathbf{x}',t)\right]=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$
$$i\left[\pi^*(\mathbf{x},t),A^*(\mathbf{x}',t)\right]=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \quad (13)$$

Как видим, поле фотонов в данной калибровке и системе отсчёта формально подобно комплексному скалярному полю, где роль оператора кирального заряда играет оператор спиральности. Поэтому импульсное разложение поля аналогично разложению комплексного скалярного поля [1]:

$$A(x)=\sum_k\left(a_{k+}e^{-ikx}+\beta^*_{k-}e^{ikx}\right),\quad \pi^*(x)=-i\sum_k\omega_k\left(a_{k+}e^{-ikx}-\beta^*_{k-}e^{ikx}\right),$$
$$A^*(x)=\sum_k\left(a^*_{k+}e^{ikx}+\beta_{k-}e^{-ikx}\right),\quad \pi(x)=i\sum_k\omega_k\left(a^*_{k+}e^{ikx}-\beta_{k-}e^{-ikx}\right). \quad (14)$$

Здесь a_{k+}, a^*_{k+} есть операторы уничтожения и рождения фотонов со спиральностью $\lambda=+1$, а β_{k-}, β^*_{k-} связаны с фотонами со спиральностью $\lambda=-1$. Соответствующие ненулевые коммутаторы для них имеют вид:

$$\left[a_{\mathbf{k}+},a^*_{\mathbf{k}'+}\right]=\left[\beta_{k-},\beta^*_{k-}\right]=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \quad (15)$$

Гамильтониан и оператор спиральности при этом приобретают вид:

$$H=\int d^3k\,H_k=\int d^3k\,\omega_k\left(a^*_{k+}a_{k+}+\beta_{k-}\beta^*_{k-}\right),$$
$$\Lambda=\int d^3k\,\Lambda_k=\int d^3k\left(a^*_{k+}a_{k+}-\beta_{k-}\beta^*_{k-}\right). \quad (16)$$

Здесь произведение операторов с отрицательной спиральностью $\beta_{k-}\beta^*_{k-}$ не является нормально упорядоченным. Для перехода к нормально-упорядоченным операторам воспользуемся зарядовой симметрией (*C*-симметрией), переводящей частицы в античастицы и обратно. В нашем случае это сводится к изменению кирального заряда системы, т.е. спиральности. При этом право-поляризованный фотон (частица) переводится в лево-поляризованный фотон (античастица) и наоборот.

Операторы рождения-уничтожения при этом подвергаются *C*-сопряжению, превращаясь в операторы рождения-уничтожения фотонов противоположной спиральности:

$$Ca_{k+}C^{-1}=a_{k-},\quad Ca^*_{k+}C^{-1}=a^*_{k-},$$
$$C\beta_{k-}C^{-1}=\beta_{k+},\quad C\beta^*_{k-}C^{-1}=\beta^*_{k+}. \quad (17)$$

Они входят в импульсное разложение *C*-преобразованных полевых функций:

$$A^c(x)=\sum_k\left(a_{k-}e^{-ikx}+\beta^*_{k+}e^{ikx}\right)=CACP^{-1},$$
$$A^{c*}(x)=\sum_k\left(a^*_{k-}e^{ikx}+\beta_{k+}e^{-ikx}\right)=CA^*C^{-1}. \quad (18)$$

При *C*-сопряжении гамильтониан каждой полевой моды инвариантен, а оператор спиральности меняет знак:

$$H^c_k\equiv C\,H_kC^{-1}=H_k,\quad \Lambda^c_k\equiv C\,\Lambda_kC^{-1}=-\Lambda_k, \quad (19)$$

где соответствующие выражения для *C*-сопряжённых гамильтониана и спиральности имеют вид:

$$H^c = \int d^3k\, H_{kP} = \int d^3k\, \omega_k \left(a^*_{k-}a_{k-} + \beta_{k+}\beta^*_{k+}\right),$$
$$\Lambda^c = \int d^3k\, \Lambda_{kP} = \int d^3k \left(a^*_{k-}a_{k-} - \beta_{k+}\beta^*_{k+}\right). \qquad (20)$$

Теперь условия *C*-симметрии (19) для полевых мод запишем детально:

$$H_k = \omega_k \left(a^*_{k+}a_{k+} + \beta_{k-}\beta^*_{k-}\right) = \omega_k \left(a^*_{k-}a_{k-} + \beta_{k+}\beta^*_{k+}\right) = H^c_k,$$
$$\Lambda_k = \left(a^*_{k+}a_{k+} - \beta_{k-}\beta^*_{k-}\right) = -\left(a^*_{k-}a_{k-} - \beta_{k+}\beta^*_{k+}\right) = -\Lambda^c_k, \qquad (21)$$

и видим, что они представляют собой два уравнения связи для четырёх билинейных операторных произведений:

$$a^*_{k+}a_{k+} + \beta_{k-}\beta^*_{k-} = a^*_{k-}a_{k-} + \beta_{k+}\beta^*_{k+},$$
$$a^*_{k+}a_{k+} - \beta_{k-}\beta^*_{k-} = -a^*_{k-}a_{k-} + \beta_{k+}\beta^*_{k+}, \qquad (22)$$

из которых находим необходимые тождества:

$$\beta_{k+}\beta^*_{k+} = a^*_{k+}a_{k+}, \quad \beta_{k-}\beta^*_{k-} = a^*_{k-}a_{k-}. \qquad (23)$$

Подставив эти тождества в (16), затем получим выражения для наблюдаемых в нормально-упорядоченном виде:

$$H = \int d^3k\, H_k = \int d^3k\, \omega_k \left(a^*_{k+}a_{k+} + a^*_{k-}a_{k-}\right),$$
$$\Lambda = \int d^3k\, \Lambda_k = \int d^3k \left(a^*_{k+}a_{k+} - a^*_{k-}a_{k-}\right), \qquad (24)$$

Таким образом, наблюдаемые выражены через операторы $a^*_{k\pm}, a_{k\pm}$ которые рождают и уничтожают фотоны со спиральностями $\lambda = \pm 1$. Действие этих операторов на состояния даётся выражениями:

$$a_{k+}\left|n_+\right\rangle = \sqrt{n_+}\left|n_+ - 1\right\rangle, \quad a^*_{k+}\left|n_+\right\rangle = \sqrt{n_+ + 1}\left|n_+ + 1\right\rangle,$$
$$a_{k-}\left|n_-\right\rangle = \sqrt{n_-}\left|n_- - 1\right\rangle, \quad a^*_{k-}\left|n_-\right\rangle = \sqrt{n_- + 1}\left|n_- + 1\right\rangle. \qquad (25)$$

В частности, при $n_+ = 0$, $n_- = 0$ операторы уничтожения определяют вакуум:

$$a_{k+}\left|0_+\right\rangle = 0, \quad a_{k-}\left|0_-\right\rangle = 0, \qquad (26)$$

который уже не содержит нулевой энергии.

Итак, при квантовании электромагнитного поля в специально выбранной системе отсчёта и в поперечной калибровке две полевые степени свободы квантуются по аналогии с комплексным скалярным полем. При этом фотоны с противоположными спиральностями ведут себя как частица и античастица.

Также как в случае комплексного векторного поля, вывод об отсутствии нулевой энергии вакуума электромагнитного поля, установленный в одной системе отсчёта и в одной калибровке, справедлив для всех систем отсчёта и для всех калибровок из-за инвариантности свойств вакуума. При этом, пропагатор фотонов и вершины взаимодействия каждый раз необходимо соответствующим образом преобразовывать из спирального базиса в ту систему координат, которая используется, учитывая при этом и изменение калибровок.

На первый взгляд отсутствие нулевой энергии поля фотонов с определённой спиральностью выглядит парадоксальным, поскольку при представлении полей как совокупностей гармонических осцилляторов нулевая энергия должна появиться. Однако если учесть, что фотоны с определённой спиральностью излучаются вращающимся диполем, т.е. ротатором, то парадокс исчезает. Действительно, во-первых, спектр ротатора сам по себе не содержит нулевой энергии, а во-вторых, при круговой поляризации сами векторы электрического и магнитного поля не осциллируют, а только вращаются на плоскости поляризации. Осциллируют лишь их проекции на фиксированные координатные оси на этой плоскости.

Это в принципе отличается от случая излучения фононов в кристалле, которое происходит при гармонических колебаниях атомов. Здесь нет *C*-симметрии, спиральные состояния фононов не независимы и переходят друг в друга при изменении системы отсчёта. При этом имеют место нулевые колебания атомов, что порождает также флуктуирующее электромагнитное поле, проявляющееся в эффекте Казимира.

3. *C*-симметричное квантование неабелевых калибровочных полей

Квантование неабелевых калибровочных полей A_μ^a с группами симметрии $SU(2)$, $SU(3)$ и т.д. отличается от случая электромагнитного поля тем, что им соответствуют несколько векторных полей, а кванты поля являются заряженными.

Тем не менее, когда эти поля безмассовые, то обладают аксиальной симметрией, а свободный гамильтониан и оператор спиральности квантов при круговой поляризации диагональны. Поэтому, развитый выше метод *C*-симметричного квантования поля фотонов формально применим и в этом случае, но с учётом ограничений, связанных с многокомпонентностью полей и их самодействием.

Однако, все дополнительные вклады, следующие из отличия от поля фотонов пропорциональны константе связи g как в членах самодействия в напряжённости поля, так и в ковариантном производном. Поэтому, если рассмотрим случай неабелевого калибровочного поля со слабой константой связи $g^2 \ll 1$, то этими членами можно будет пренебречь и квантовать поле как набор независимых фотонных степеней свободы.

При этом, как было показано выше, вакуум калибровочного поля не будет содержать нулевой энергии, следующей из свободного гамильтониана. Поскольку наличие или отсутствие нулевой энергии связано с более фундаментальными физическими причинами, чем характер взаимодействия полей, то при дальнейшем включении взаимодействия энергия вакуума, если и появится, то уже не будет связана с нулевыми флуктуациями. Вклады в плотность энергии физического вакуума, которые могут появиться, будут пропорциональны константе связи и не будут иметь никакого отношения к нулевой энергии мод, связанных с процедурой квантования свободного поля.

Итак, при квантовании неабелевых калибровочных полей в специально выбранной системе отсчёта, в поперечной калибровке и в приближении слабой связи, когда поле практически не отличается от поля фотонов, нулевая энергия вакуума отсутствует.

Этот вывод об отсутствии нулевой энергии, установленный с этими ограничениями, справедлив для всех систем отсчёта и для всех калибровок из-за инвариантности свойств вакуума, а также при значениях констант связи, когда справедлива теория возмущений, поскольку вклады взаимодействия относятся к динамическим эффектам в физическом вакууме, не связанными с нулевой энергией мод свободного гамильтониана.

Разумеется, эти выводы относятся к системам без вакуумного конденсата (или хотя бы к тем областям, где его нет) и к ситуациям, где непертурбативные эффекты не играют решающей роли. Вклады конденсатов и топологически нетривиальных решений в энергию вакуума полей будут обсуждаться в дальнейших публикациях, но они также не имеют отношения к наличию или отсутствию нулевой энергии свободных полей.

4. С-симметричное квантование спинорного поля

Рассмотрим спинорное поле со стандартным лагранжианом:

$$L = \int d^3x\, \bar{\psi}\left[i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} - eA_{\mu}\right) - m\right]\psi\ , \tag{27}$$

который ведёт к гамильтониану и оператору заряда (при взаимодействии с калибровочным полем A_{μ}):

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\, \psi^{+}\left(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m\right)\psi\ , \\ Q &= \int d^3x\, \psi^{+}\psi\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Импульсное разложение спинорных полей имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\alpha}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}}\left(b_{p\alpha}u_p^{\alpha}e^{-ipx} + \tilde{d}^{+}_{p\alpha}v_p^{\alpha}e^{ipx}\right), \\ \psi^{+}(x) &= \sum_{\alpha}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{m}{E_{\mathbf{p}}}}\left(b^{+}_{p\alpha}u_p^{\alpha+}e^{ipx} + \tilde{d}_{p\alpha}v_p^{\alpha+}e^{-ipx}\right), \end{aligned} \tag{29}$$

где выбрана нормировка: $u_p^{\alpha+}u_p^{\alpha'} = v_p^{\alpha+}v_p^{\alpha'} = \delta^{\alpha\alpha'}E_p/m$, и $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Здесь важно то обстоятельство, что как и в случае скалярного поля [2], операторы $\tilde{d}^{+}_{p\alpha}$, $\tilde{d}_{p\alpha}$ являются вспомогательными и не могут быть прямо интерпретированы как операторы рождения-уничтожения античастиц. Последние получим далее из операторов рождения-уничтожения частиц путём их зарядового сопряжения. Тот факт, что таким образом полученные истинные операторы античастиц $d^{+}_{p\alpha}$, $d_{p\alpha}$ не совпадают с $\tilde{d}^{+}_{p\alpha}$, $\tilde{d}_{p\alpha}$ и есть то нетривиальное последствие *С*-симметрии, которое далее приведёт к исчезновению нулевой энергии вакуума.

Как известно, условия релятивистской причинности требуют, чтобы спинорные поля квантовались с помощью одновременных *анти*коммутаторов:

$$\begin{aligned} \left\{\bar{\psi}(\mathbf{x},t), \psi(\mathbf{x}',t)\right\} &= \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,I_{(4)}\,, \\ \left\{\psi(\mathbf{x},t), \psi(\mathbf{x}',t)\right\} &= \left\{\bar{\psi}(\mathbf{x},t), \bar{\psi}(\mathbf{x}',t)\right\} = 0\,, \end{aligned} \tag{30}$$

из которых следуют ненулевые антикоммутаторы для отдельных мод:

$$\left\{b_{p\alpha}, b^{+}_{p\alpha}\right\} = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{\alpha\alpha'}\,,\quad \left\{\tilde{d}_{p\alpha}, \tilde{d}^{+}_{p\alpha}\right\} = \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{\alpha\alpha'}\,. \tag{31}$$

Гамильтониан и оператор заряда свободного поля есть сумма вкладов независимых мод:

2. *Спинорные и векторные поля.*

$$H=\sum_{\alpha}\int d^3p\,H_{p\alpha}=\sum_{\alpha}\int d^3p\,E_p\left(b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}-\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}\right),$$
$$Q=\sum_{\alpha}\int d^3p\,Q_{p\alpha}=\sum_{\alpha}\int d^3p\left(b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}+\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}\right). \tag{32}$$

Вводя операторы, зарядово-сопряжённые к ранее введённым:

$$Cb_{p\alpha}C^{-1}=d_{p\alpha},\qquad Cb^+_{p\alpha}C^{-1}=d^+_{p\alpha},$$
$$C\tilde d_{p\alpha}C^{-1}=\tilde b_{p\alpha},\qquad C\tilde d^+_{p\alpha}C^{-1}=\tilde b^+_{p\alpha}, \tag{33}$$

выражения для зарядово-сопряжённых наблюдаемых можно записать в виде:

$$H_c=\sum_{\alpha}\int d^3p\,H_{p\alpha(c)}=\sum_{\alpha}\int d^3p\,E_p\left(d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}-\tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha}\right),$$
$$Q_c=\sum_{\alpha}\int d^3p\,Q_{p\alpha(c)}=\sum_{\alpha}\int d^3p\left(d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}+\tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha}\right), \tag{34}$$

где условия *C*-симметрии для каждой из независимых полевых мод есть:

$$H_{p\alpha(c)}\equiv CH_{p\alpha}C^{-1}=H_{p\alpha},\quad Q_{p\alpha(c)}\equiv CQ_{p\alpha}C^{-1}=-Q_{p\alpha}. \tag{35}$$

Эти условия, записанные детально:

$$H_{p\alpha}=E_p\left(b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}-\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}\right)=E_p\left(d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}-\tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha}\right)=H_{p\alpha(c)},$$
$$Q_{p\alpha}=\left(b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}+\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}\right)=-\left(d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}+\tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha}\right)=-Q_{p\alpha(c)}, \tag{36}$$

означают, в действительности, следующие два *уравнения связи* для четырёх билинейных операторных произведений:

$$b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}-\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}=d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}-\tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha},$$
$$b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}+\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}=-d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}-\tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha}. \tag{37}$$

Складывая и вычитая эти соотношения, два произведения вспомогательных операторов $\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}$ и $\tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha}$ можем выразить через два произведения истинных операторов рождения-уничтожения частиц и античастиц:

$$\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}=-d^+_{p\alpha}d_{p\alpha},\quad \tilde b_{p\alpha}\tilde b^+_{p\alpha}=-b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}. \tag{38}$$

Подставив их в (32) и (34), получим окончательные выражения для H и Q, содержащие только нормально-упорядоченные произведения операторов рождения-уничтожения взаимно зарядово-сопряжённых квантов:

$$H=H_c=\sum_{\alpha}\int d^3p\,E_p\left(b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}+d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}\right),$$
$$Q=-Q_c=\sum_{\alpha}\int d^3p\left(b^+_{p\alpha}b_{p\alpha}-d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}\right). \tag{39}$$

Отметим, что теперь исчезает вакуумное среднее как от оператора заряда $\langle 0|Q|0\rangle=0$, так и от пространственных компонент тока:

$$\int d^3x\langle 0|\mathbf{j}(x)|0\rangle=\int d^3x\langle 0|\bar\psi(x)\boldsymbol{\gamma}\psi(x)|0\rangle\sim$$
$$\sim\sum_{p\alpha}\langle 0|\tilde d_{p\alpha}\tilde d^+_{p\alpha}|0\rangle=\sum_{p\alpha}\langle 0|d^+_{p\alpha}d_{p\alpha}|0\rangle=0. \tag{40}$$

Итак, вакуум спинорного поля с лагранжианом (27) не содержит нулевой энергии и нулевого заряда, а наблюдаемые естественным образом нормально-упорядочены с помощью условий зарядовой симметрии.

В случае безмассового нейтрального спинорного поля, если имеет место киральная симметрия и сохраняется киральный заряд, то квантование такого поля аналогично приведённому выше.

Литература

1. Закир З. (2007) *Теор. физ., астрофиз. и космол.,* **2**, 2, с. 10, **2**, 3, с. 24.
2. Закир З (2006) *Теор. физ., астрофиз.и космол.,* **1**, 1, 12; **1**, 4, 67; *arxiv*: 0705-0899.