Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **2**, N 3, с. 24 – 33, в1, 2 декабря 2007

Электрон.: ТФАК: 2527-008 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.2527-008

Квантование релятивистских полей без нулевой энергии
1. Комплексное скалярное поле

Захид Закир [1]

Аннотация

Релятивистские поля, имеющие моды с противоположными по знаку частотами, обычно представляются как комплексные поля только с положительно-частотными модами, но с глобальной $U(1)$ симметрией и симметрией относительно зарядового сопряжения (C-симметрия). Однако при обычном введении операторов античастиц C-симметрия оказывается нарушенной и в результате появляются нулевой заряд и нулевая энергия вакуума. Предложен новый метод квантования релятивистских полей без нарушения C-симметрии. На примере комплексного скалярного поля показано, что условия C-симметрии налагают такие связи на билинейные произведения операторов, которые ведут к новым операторным тождествам. Они затем позволяют выразить наблюдаемые через зарядово-сопряжённые операторы рождения-уничтожения сразу в нормально-упорядоченном виде без нулевой энергии и нулевого заряда. Показано, что самодействие комплексного скалярного поля не меняет энергию вакуума. Инвариантными пропагаторами частиц и античастиц могут быть приняты запаздывающий и опережающий пропагаторы соответственно.

PACS: 03.70.+k; 11.10.-z; 11.30.Er
Ключевые слова: вакуумная энергия, вакуумные флуктуации, обращение времени, зарядовое сопряжение, космологическая константа

Содержание

Введение

В предыдущих статьях [1,2] было показано, что стандартные правила квантования положительно-частотного нерелятивистского гармонического осциллятора не были в достаточной мере адаптированы для квантования систем, имеющих положительно- и отрицательно-частотные моды. В таких системах первоначально есть симметрия относительно взаимной замены квантов противоположного знака частоты с изменением знака их гамильто-

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент, Узбекистан;*
zahidzakir@theor-phys.org

нианов. При интерпретации отрицательно-частотных квантов как положительно-частотных антиквантов с противоположным знаком заряда, эта симметрия трансформируется в симметрию относительно зарядового сопряжения (*C*-симметрия), при которой меняются знаки только их зарядов.

Однако при обычных процедурах квантования релятивистских полей оказывались нарушенными обе формы этой дискретной симметрии. Первая – расходящейся нулевой энергией, а вторая – расходящимся нулевым зарядом вакуума. Затем, эти симметрии оказывались формально восстановленными после вычёркивания расходящихся констант.

В статьях [1] была предложена естественная модификация стандартных процедур квантования, когда вместо применявшихся искусственных гипотез и процедур были использованы только ограничения, следующие из *C*-симметрии. При этом для систем с *C*-симметрией нулевая энергия и нулевой заряд исчезают.

В ходе дискуссии об этом формализме были выдвинуты в основном *четыре* возражения.

Первое возражение (с которого начинались все дискуссии) состояло в том, что существование нулевых флуктуаций вакуума экспериментально доказано несколькими эффектами и что этот факт является общепринятым. Ответ на это возражение состоит в том, что Лэмбовский сдвиг и эффект Казимира, на которые и ссылаются при этом, прекрасно описываются взаимодействиями реальных источников без нулевой энергии вакуума и этот факт также хорошо известен [1]. Более того, большинство последовательно мыслящих авторов отмечали, что если бы нулевая энергия реально существовала, то это привела бы к катастрофическому противоречию между физикой частиц и космологией. Поэтому наблюдения свидетельствуют об отсутствии, а не о существовании нулевых флуктуаций вакуума, так что проблема в том, как согласовать этот факт с принципами квантовой теории поля.

Второе возражение было об использовании отрицательно-частотных состояний, которые будут иметь отрицательную норму. Это возражение отпадает, если с самого начала вводить операторы античастиц так, как это принято в теориях релятивистских полей, хотя и более осторожно. В предыдущей статье о комплексном гармоническом осцилляторе [2] и в данной статье рассматривается именно такая версия нового метода. Более фундаментальное решение проблемы отрицательной нормы приведено в [3].

Третье возражение касалось вопросов перенормировки, что если даже исключить константу в невозмущённом гамильтониане, то взаимодействия всё равно дадут расходящийся вклад в энергию вакуума, особенно, если учесть квантовые эффекты гравитации. Как показано в [2] и будет обсуждаться в данной статье, наиболее быстро растущие вклады в энергию вакуума – нулевые флуктуации и поправки первого порядка - исчезают из-за условий *C*-симметрии.

Отметим также, что дискретные симметрии вместо причинного пропагатора формально позволяют использовать запаздывающий и опережающий пропагаторы, исчезающие за световым конусом и менее сингулярные в нуле, что привлекательно с физической точки зрения.

И, наконец, любая дискуссия завершалась тем, что хотя и нет особых возражений против нового метода как формализма, но нулевые флуктуации полей реально должны быть хотя бы из-за соотношений неопределённостей и что это строгое требование квантовой механики. Это - традиционное *четвёртое возражение,* после которого новый метод рассматривался как математический трюк, лишённый физического смысла.

Ответ на это последнее возражение, данный в предыдущей статье [2], состоит в том, что стандартные соотношения неопределённостей Гейзенберга $\delta x^2 \delta p^2 \geq \hbar^2/4$ выведены для систем с *вещественными* каноническими переменными x, p. Если же квантовать системы с *неэрмитовыми* (комплексными) каноническими переменными q, p и q^*, p^*, к которым и относятся большинство релятивистских полей, то оказалось, что имеет место более общая форма соотношений неопределённостей:

$$\delta |q|^2 \, \delta |p|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle Q \rangle^2 , \tag{1}$$

где $\langle Q \rangle = i \langle n | q^* p^* - p q | n \rangle / \hbar$ - заряд состояния, которое флуктуирует.

Для эрмитовых переменных выражение в скобках в $\langle Q \rangle$ превращается в стандартный коммутатор $i(q p - p q)/\hbar = -1$ и соотношение (1) переходит в стандартное соотношение неопределённостей. Тогда нулевая энергия для основного состояния гармонического осциллятора неизбежна.

Однако, для систем с комплексными каноническими переменными и с зарядово-симметричным основным состоянием имеем $\langle Q \rangle = 0$ и из (1) тогда следует $\delta |q|^2 \, \delta |p|^2 \geq 0$. Это означает, что основное состояние такой системы не квантуется и не флуктуирует. В случае релятивистских полей тогда вакуум (невозмущённый) есть аналог внешнего поля, которое не флуктуирует и его энергия определяется классическим гамильтонианом.

В данной статье предложенный новый метод применяется к квантованию комплексного релятивистского скалярного поля. В первом разделе приводится канонический формализм для поля. При этом оказывается, что операторы β_k^*, β_k, вводимые при частотном разложении полей и обычно интерпретируемые как операторы античастиц не являются зарядово-сопряжёнными к операторам частиц. Поэтому, в разделе 2 рассматриваются условия С-симметрии, позволяющие ввести операторы античастиц b_k^*, b_k как зарядово-сопряжённые к операторам частиц и получить операторное тождество

$$b_k^* b_k = \beta_k \beta_k^* . \tag{2}$$

Это тождество затем ведёт к исчезновению нулевого заряда и нулевой энергии вакуума, а также вкладов первого порядка (3-раздел). В разделе 4 получен инвариантный пропагатор полей.

1. Канонический формализм для комплексного скалярного поля

В теории релятивистских полей положительно- и отрицательно-частотные состояния появляются в симметричной форме и, как результат, число степеней свободы релятивистского поля оказывается удвоенным по сравнению с таким же нерелятивистским полем. Один из способов учёта этого удвоения степеней свободы - это представление релятивистского поля как комплексного.

Лагранжиан комплексного скалярного поля $\phi = \phi_1 + i\phi_2$:

$$L = \int d^3x \left[\left(\partial_\mu \phi^* \right) \left(\partial^\mu \phi \right) - m^2 \phi^* \phi \right], \tag{3}$$

даёт канонические импульсы $\pi(x) = \partial_t \phi^*$, $\pi^*(x) = \partial_t \phi$ и гамильтониан:

$$H = \int d^3x \left(\pi\pi^* + m^2 \phi^* \phi \right). \tag{4}$$

Отметим, что при включении взаимодействия с калибровочными полями разные упорядочения ведут к разным операторам заряда. Далее будем использовать стандартное упорядочение как в (3) и (4).

Уравнения поля для комплексного поля:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0 , \quad \partial_\mu \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi^* = 0 , \tag{5}$$

имеют решения с модами положительной и отрицательной частоты:

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(a_k e^{-ikx} + a_{-k} e^{ikx} \right), \qquad \sum_{\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}}. \tag{6}$$

$$\phi^*(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left(a_k^* e^{ikx} + a_{-k}^* e^{-ikx} \right). \tag{7}$$

При квантовании вводятся одновременные коммутационные соотношения:

$$i\left[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{x}',t) \right] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad i\left[\pi^*(\mathbf{x},t), \phi^*(\mathbf{x}',t) \right] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{8}$$

В данной статье мы исключаем отрицательно-частотные операторы так, как в стандартной квантовой теории релятивистских полей, вводя положительно-частотный оператор β_k^* вместо оператора уничтожения отрицательно-частотного кванта a_{-k}. При этом два вида квантов с разными знаками частоты перейдут в два вида квантов разного знака заряда.

Тогда, частотное разложение полей принимает стандартный вид:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(a_k e^{-ikx} + \beta_k^* e^{ikx} \right), & \pi^*(x) &= -i \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_k e^{-ikx} - \beta_k^* e^{ikx} \right), \\ \phi^*(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(a_k^* e^{ikx} + \beta_k e^{-ikx} \right), & \pi(x) &= i \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_k^* e^{ikx} - \beta_k e^{-ikx} \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку полевые операторы ϕ^*, ϕ и π^*, π неэрмитовы, то два набора операторов рождения-уничтожения a_k^*, a_k и β_k^*, β_k относятся к разным типам частиц, и они взаимно коммутируют. Соответствующие ненулевые коммутационные соотношения для этих операторов, следующие из (8), есть:

$$\left[a_k, a_{k'}^* \right] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad \left[\beta_k, \beta_{k'}^* \right] = \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{10}$$

Гамильтониан (4) тогда приобретает вид:

$$H = \int d^3k\, H_k = \int d^3k\, \omega_k \left(a_k^* a_k + \beta_k \beta_k^* \right). \tag{11}$$

Здесь произведение $\beta_k \beta_k^*$ не является нормально-упорядоченным и это было главной трудностью прежних трактовок. При этом операторы β_k^*, β_k *предполагались* зарядово-сопряжёнными к операторам частиц a_k^*, a_k. Как результат этой интуитивной *гипотезы* затем, после замены $\beta_k \beta_k^* = \beta_k^* \beta_k + 1$, появлялись нулевая энергия и нулевой заряд вакуума.

Однако, как будет далее, такая интерпретация операторов оказывается некорректной, так как нарушаются условия *C*-симметрии. На деле же, есть другие операторы b_k^*, b_k, зарядово-сопряжённые операторам частиц a_k^*, a_k, которые, из-за условий *C*-симметрии, оказываются связанными с операторами β_k^*, β_k нелинейно через соотношение (2).

2. Симметрии комплексного поля и их следствия

В системе, описываемой комплексным полем с лагранжианом (3) имеется глобальная $U(1)$ симметрия:

$$\phi'(x) = U\phi(x)U^{-1}, \quad U = \exp(i\theta Q) \tag{12}$$

с сохраняющимся зарядом $\partial_t Q = 0$. Здесь Q есть оператор заряда, определённый стандартным образом как:

$$Q = i\int d^3x \left[\phi^* \partial_t \phi - \left(\partial_t \phi^* \right) \phi \right] = i\int d^3x \left(\phi^* \pi^* - \pi \phi \right), \tag{13}$$

который после частотного разложения полей приобретает вид:

$$Q = \int d^3k\, Q_k = \int d^3k \left(a_k^* a_k - \beta_k \beta_k^* \right). \tag{14}$$

Отметим, что мы пользуемся стандартным упорядочением и не рассматриваем более сложные формы упорядочения.

Поскольку два вида квантов имеют одинаковые массы, но разные заряды, то имеется симметрия относительно *операции зарядового сопряжения* (*C*), когда гамильтониан инвариантен, а заряд меняет знак:

$$H_c \equiv CHC^{-1} = H, \quad Q_c \equiv CQC^{-1} = -Q. \tag{15}$$

Поскольку комплексное поле представлено как набор *независимых* комплексных осцилляторов, то условия *C*-симметрии имеют силу для *каждого* из осцилляторов в отдельности:

$$H_{kc} \equiv CH_kC^{-1} = H_k, \quad Q_{kc} \equiv CQ_kC^{-1} = -Q_k. \tag{16}$$

Существование этой операции симметрии ведёт к существованию операторов, зарядово-сопряжённых к введённым ранее:

$$\begin{aligned} b_k &= Ca_kC^{-1}, \quad b_k^* = C\,a_k^*C^{-1}, \\ \alpha_k &= C\beta_kC^{-1}, \quad \alpha_k^* = C\beta_k^*C^{-1}, \end{aligned} \tag{17}$$

и удовлетворяющих коммутационным соотношениям:

$$\left[b_k, b^*_{k'}\right] = \delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right), \quad \left[\alpha_k, \alpha^*_{k'}\right] = \delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right). \tag{18}$$

Операторы рождения-уничтожения a_k, a^*_k и b_k, b^*_k определяют основное и возбуждённые состояния $\left|n_\pm\right\rangle$, содержащие взаимно зарядово-сопряжённые кванты (частицы и античастицы):

$$\begin{aligned} a_k\left|n_+\right\rangle &= \sqrt{n_+}\left|n_+-1\right\rangle, \quad a^*_k\left|n_+\right\rangle = \sqrt{n_++1}\left|n_++1\right\rangle, \\ b_k\left|n_-\right\rangle &= \sqrt{n_-}\left|n_--1\right\rangle, \quad b^*_k\left|n_-\right\rangle = \sqrt{n_-+1}\left|n_-+1\right\rangle. \end{aligned} \tag{19}$$

При $n_+=0$, $n_-=0$ имеем $a_k\left|0_+\right\rangle = 0$ и $b_k\left|0_-\right\rangle = 0$.

Соответствующие зарядово-сопряжённые полевые операторы и импульсы:

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &= \sum_{\mathbf{k}}\left(b_k e^{-ikx} + \alpha^*_k e^{ikx}\right), \qquad \phi^*_c(x) = \sum_{\mathbf{k}}\left(b^*_k e^{ikx} + \alpha_k e^{-ikx}\right), \\ \pi_c(x) &= i\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\left(b^*_k e^{ikx} - \alpha_k e^{-ikx}\right), \quad \pi^*_c(x) = -i\sum_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\left(b_k e^{-ikx} - \alpha^*_k e^{ikx}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$i\left[\pi_c(\mathbf{x},t), \phi_c(\mathbf{x}',t)\right] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad i\left[\pi^*_c(\mathbf{x},t), \phi^*_c(\mathbf{x}',t)\right] = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{21}$$

Зарядово-сопряжённые гамильтониан H_c и оператор заряда Q_c выражаются через новые операторы как:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3k\, H_{kc} = \int d^3k\, \omega_k\left(b^*_k b_k + \alpha_k \alpha^*_k\right), \\ Q_c &= \int d^3k\, Q_{kc} = \int d^3k\left(b^*_k b_k - \alpha_k \alpha^*_k\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Далее, условия *C*-симметрии (16) записываем более подробно как:

$$\begin{aligned} H_k &= \omega_k\left(a^*_k a_k + \beta_k \beta^*_k\right) = \omega_k\left(b^*_k b_k + \alpha_k \alpha^*_k\right) = H_{kc}, \\ Q_k &= \left(a^*_k a_k - \beta_k \beta^*_k\right) = -\left(b^*_k b_k - \alpha_k \alpha^*_k\right) = -Q_{kc}, \end{aligned} \tag{23}$$

и получаем два *уравнения связи* для билинейных произведений операторов:

$$\begin{aligned} a^*_k a_k + \beta_k \beta^*_k &= b^*_k b_k + \alpha_k \alpha^*_k, \\ a^*_k a_k - \beta_k \beta^*_k &= -b^*_k b_k + \alpha_k \alpha^*_k. \end{aligned} \tag{24}$$

Складывая и вычитая эти равенства, два произведения вспомогательных операторов $\beta_k \beta^*_k$ и $\alpha_k \alpha^*_k$ можем выразить через два произведения зарядово-сопряжённых операторов $a^*_k a_k$ и $b^*_k b_k$ как:

$$\alpha_k \alpha^*_k = a^*_k a_k, \quad \beta_k \beta^*_k = b^*_k b_k. \tag{25}$$

Эти *операторные тождества* и есть те ограничения, которые накладывает на систему существование *C*-симметрии.

Далее, подставив эти тождества в выражения для гамильтониана (11) и заряда (14), получаем окончательный результат:

$$
\begin{aligned}
&H = H_c = \int d^3k \, H_{kc} = \int d^3k \, \omega_k \left(a_k a_k^* + b_k^* b_k \right), \\
&Q = -Q_c = \int d^3k \left(a_k a_k^* - b_k^* b_k \right).
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Итак, нетривиальный факт состоит в том, что операторы рождения-уничтожения античастиц b_k^*, b_k связаны с операторами поля не прямо, а через вспомогательные операторы β_k^*, β_k и билинейные соотношения (25).

Если, как это было общепринято в квантовой теории поля ранее, мы бы напрямую идентифицировали операторы β_k^*, β_k с b_k^*, b_k, считая β_k^*, β_k операторами рождения-уничтожения античастиц, то нарушили бы требования *C*-симметрии. Действительно, обычная интуитивная гипотеза

$$
\beta_k = b_k, \; \beta_k^* = b_k^*, \tag{27}
$$

означает, согласно (25), что $\beta_k \beta_k^* = \beta_k^* \beta_k$ и $b_k b_k^* = b_k^* b_k$, которое после зарядового сопряжения ведёт к $a_k a_k^* = a_k^* a_k$. Поскольку эти операторы рождения-уничтожения не могут коммутировать, то, следовательно, гипотеза (27) и условия *C*-симметрии (16) несовместимы. Итак, обычный подход фактически означает отказ от соблюдения условий *C*-симметрии.

В противоположность такому подходу, ведущему к внутренним противоречиям в теории, мы сохраняем условия С-симметрии (16) и отказываемся от необоснованной гипотезы (27). Затем, сами условия симметрии (16) позволяют установить нетривиальную связь (25) между вспомогательными операторами и истинными операторами античастиц.

Итак, энергия и заряд вакуума свободного релятивистского поля оказываются равными нулю из-за зарядовой симметрии системы. В следующем разделе рассмотрим, будут ли вклады в энергию вакуума при включении самодействия скалярного поля в первом порядке.

3. Энергия вакуума с учётом самодействия. Первый порядок.

Симметрии комплексного поля допускают только калибровочно-инвариантные потенциалы вида $(\phi^* \phi)^n$ и $(\phi_c^* \phi_c)^n$ (включая их произведения), сохраняющие заряд и поэтому далее будем рассматривать только такие взаимодействия. Стандартный потенциал 4-порядка имеет вид:

$$
V = \lambda \left(\phi^* \phi + \phi_c^* \phi_c \right)^2, \tag{28}
$$

Вклад в энергию вакуума в первом порядке теории возмущений даётся матричным элементом от потенциала:

$$
\begin{aligned}
&\langle 0 | V^{(1)} | 0 \rangle = \lambda \int_{-T}^{T} dt \int d^3x \langle 0 | \phi^*(x) \phi^*(x) \phi(x) \phi(x) | 0 \rangle = \\
&= \lambda \int_{-T}^{T} dt \int d^3x \sum_{\mathbf{kk'qq'}} e^{-ikx - ik'x + iqx + iq'x} \langle 0 | a_{q'}^* a_k \beta_{k'} \beta_q^* + \beta_{k'} \beta_{q'} \beta_k^* \beta_q^* | 0 \rangle = 0.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Этот матричный элемент изображается диаграммой типа «бабочка». Матричный элемент имеет вид, когда можно воспользоваться полученными выше операторными тождествами и благодаря им исчезает. Из-за коммутативности полевых операторов в один и тот же момент времени, матричные элементы от других расстановок операторов в потенциале также исчезают.

Итак, в первом порядке теории возмущений нет вкладов в энергию вакуума от самодействия комплексного скалярного поля. Отметим, что исчезают и вклады в энергию одночастичных состояний некоторых диаграмм «пузырь»:

$$\begin{aligned} &\langle 1,0|V|1,0\rangle \sim \lambda\int d^4x\langle 1,0|\left(\phi^*\phi\right)^2|1,0\rangle = 0, \\ &\langle 0,1|V|0,1\rangle \sim \lambda\int d^4x\langle 0,1|\left(\phi_c^*\phi_c\right)^2|0,1\rangle = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Такие вклады и петлевые диаграммы будут рассмотрены в другой статье.

4. Пропагатор для комплексного скалярного поля

Причинный пропагатор скалярного поля в стандартном подходе определялся как вакуумное среднее от хронологического произведения полей:

$$\begin{aligned} iG_c\left(x'-x\right) &= \langle 0|T\phi\left(x'\right)\phi^*\left(x\right)|0\rangle = \\ &= \theta\left(t'-t\right)\langle 0|\phi\left(x'\right)\phi^*\left(x\right)|0\rangle + \theta\left(t-t'\right)\langle 0|\phi^*\left(x\right)\phi\left(x'\right)|0\rangle. \end{aligned} \tag{31}$$

При этом, в полевых операторах использоалась гипотеза (27), что при импульсном разложении приводит к ненулевому вакуумному среднему от матричного элемента $\langle 0|\beta_{k'}\beta_k^*|0\rangle = \delta^3\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right)$, тогда как другой матричный элемент исчезает: $\langle 0|\beta_k^*\beta_k|0\rangle = 0$.

В нашем же случае эти матричные элементы меняются местами и в действительности, из-за тождеств (25), мы теперь имеем для них значения, противоположные ранее принятым:

$$\begin{aligned} &\langle 0|\beta_{k'}\beta_k^*|0\rangle = 0, \\ &\langle 0|\beta_{k'}^*\beta_k|0\rangle = \langle 0|\beta_{k'}\beta_k^*|0\rangle - \delta^3\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right) = -\delta^3\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Поэтому нам надо построить пропагатор поля, учитывающий эти изменения.

Для этого рассмотрим все четыре возможные двухточечные функции комплексного поля, используя импульсные разложения. Вакуумные средние $\langle 0|\phi(x)\phi(x')|0\rangle$ и $\langle 0|\phi^*(x)\phi^*(x')|0\rangle$ исчезают, но теперь зануляются и диагональные матричные элементы $\langle 0|\phi^*(x)\phi(x')|0\rangle$ $\langle 0|\phi_c^*(x)\phi_c(x')|0\rangle$:

$$\begin{aligned} &\langle 0|\phi^*(x)\phi(x')|0\rangle = \sum_{kk'}\left(\langle 0|a_k^*a_{k'}|0\rangle e^{-ik'x'+ikx} + \langle 0|\beta_k\beta_{k'}^*|0\rangle e^{ik'x'-ikx}\right) = \\ &= \sum_{kk'}\left(\langle 0|a_k^*a_{k'}|0\rangle e^{-ik'x'+ikx} + \langle 0|b_{k'}^*b_k|0\rangle e^{ik'x'-ikx}\right) = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

В результате, вакуумное среднее от оставшейся четвёртой двухточечной функции просто равно коммутатору полей и имеет вид:

$$\begin{aligned}&\langle 0|\phi(x')\phi^*(x)|0\rangle = \sum_{k'k}\langle 0|\left(a_{k'}e^{-ik'x'}+\beta^*_{k'}e^{ik'x'}\right)\left(a^*_k e^{ikx}+\beta_k e^{-ikx}\right)|0\rangle = \\ &= \sum_{kk'}\left(\langle 0|a_{k'}a^*_k|0\rangle e^{-ik'x'+ikx}+\langle 0|\beta^*_{k'}\beta_k|0\rangle e^{ik'x'-ikx}\right) = \\ &= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}\left(e^{-i\omega_k(t'-t)}-e^{i\omega_k(t'-t)}\right) = \\ &= -i\left[G_{ret}(x'-x)-G_{adv}(x'-x)\right] = -iG(x'-x).\end{aligned} \tag{34}$$

и двухточечная функция оказывается автоматически хронологически упорядоченной. При этом, если $t'-t>0$ вклад даёт только *запаздывающий* пропагатор $G_{ret}(x'-x)$ и если $t'-t<0$, то *опережающий* пропагатор $G_{adv}(x'-x)$.

Аналогичные выражения получатся и для двухточечной функции для зарядово-сопряжённых полевых операторов:

$$\begin{aligned}&\langle 0|\phi_c(x)\phi^*_c(x')|0\rangle = \\ &= \sum_{kk'}\langle 0|b_k b^*_{k'}e^{-ikx+ik'x'}+\left[\alpha_k\alpha^*_{k'}-\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\right]e^{ikx-ik'x'}|0\rangle = \\ &= \sum_{kk'}\langle 0|b_k b^*_{k'}e^{-ikx+ik'x'}-\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})e^{ikx-ik'x'}|0\rangle = \\ &= -i\tilde{G}(x'-x) = iG(x-x').\end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, формально пропагатором комплексного скалярного поля может быть принята *инвариантная функция Паули-Йордана* $G(x'-x)$, которая автоматически обеспечивает хронологическое упорядочение и исчезает для пространственно-подобных интервалов:

$$G(x'-x) = -\tilde{G}(x-x') = 0, \qquad (x'-x)^2 < 0\,. \tag{36}$$

Первым физическим свойством релятивистских систем, которое ранее выражал причинный пропагатор $G_c(x'-x)$, являлся тот факт, что вперёд во времени должны распространяться только положительно-энергетические, а назад во времени – только отрицательно-энергетические частицы. В нашем случае пропагатор $G(x'-x)$ есть пропагатор частицы, если временной интервал лежит в верхнем конусе (т.е. $t'-t>0$), и пропагатор античастицы, если в нижнем конусе ($t'-t<0$) от момента t. В обоих случаях пропагатор является *запаздывающим*, если начать отсчёт от более раннего момента и в этом смысле условия причинности строго соблюдаются. В самом деле, в случае античастицы событие t' происходит раньше, чем событие t и античастице соответствует запаздывающий пропагатор с положительным интервалом $t-t'>0$.

Второе физическое свойство, которое ранее выражал причинный пропагатор – это то, что сохранение заряда проявлялось в непрерывности мировой линии частицы независимо от направления времени. В нашем случае пропагатор $G(x'-x)$ увеличивает на единицу заряд в мировой точке x и уменьшает на единицу в мировой точке x', тогда как $\tilde{G}(x'-x)$ делает обратное. Выбор одного из зарядово-сопряжённых пропагаторов $G(x'-x)$ или $\tilde{G}(x'-x)$ зависит от того, положительный заряд приписан частице или античастице. Если частице, то используется пропагатор $G(x'-x)$, переносящий положительный заряд при $t'-t>0$ и отрицательный при $t-t'>0$.

Итак, пропагатор $G(x'-x)$ действительно может играть роль пропагатора для частиц и античастиц, обладающий необходимыми причинными свойствами. В инвариантной форме он имеет стандартный вид:

$$\begin{gathered}
G\left(x'-x\right)=i\left\langle 0\left|\phi\left(x'\right)\phi^{*}\left(x\right)\right|0\right\rangle=\frac{i}{\left(2\pi\right)^{3}}\int d^{4}k\,\varepsilon\left(k_{0}\right)\delta\left(k^{2}-m^{2}\right)e^{-ikx}= \\
=G_{ret}\left(x'-x\right)-G_{adv}\left(x'-x\right), \\
G_{ret}\left(x'-x\right)=i\int\frac{d^{4}k}{\left(2\pi\right)^{4}}\frac{e^{-ikx}}{m^{2}-k^{2}-i\varepsilon k_{0}}, \\
G_{adv}\left(x'-x\right)=i\int\frac{d^{4}k}{\left(2\pi\right)^{4}}\frac{e^{-ikx}}{m^{2}-k^{2}+i\varepsilon k_{0}}.
\end{gathered}\tag{37}$$

Если теперь сравним пропагатор $G(x'-x)$ со стандартным причинным пропагатором $G_c(x'-x)$, то видим, что причинный пропагатор имеет один формальный и два физических недостатка. Во-первых, хронологическое упорядочение в нём производилось «вручную» вставлением θ-функций. Во-вторых, причинный пропагатор не исчезает для пространственно-подобных траекторий и в-третьих, он обладает сильными сингулярностями на малых расстояниях $x'\to x$. В пропагаторе же $G(x'-x)$ нет этих недостатков - хронологическое упорядочение происходит автоматически и единственным образом, он исчезает за световым конусом и имеет более мягкое поведение на малых расстояниях.

Заключение

Итак, C-симметрия ведёт к новому и нетривиальному эффекту –естественному нормальному упорядочению операторов рождения-уничтожения в наблюдаемых комплексного поля с исчезновением нулевой энергии и нулевого заряда вакуума. При включении C-симметричных взаимодействий энергия основного состояния также остаётся равной нулю.

Пропагаторами комплексного поля формально можно выбрать не причинный пропагатор, как это принято, а запаздывающий и опережающий пропагаторы, имеющие более привлекательные свойства с точки зрения физики.

Применения нового метода квантования к другим релятивистским полям будут рассмотрены в последующих статьях.

Литература

1. Закир З (2006) *Теор. физ., астрофиз.и космол.,* **1**, 1, 12; **1**, 4, 67; *arXiv*:0705-0899.
2. Закир З. (2007) *Теор. физ., астрофиз. и космол.,* **2**, 2, 10.
3. Закир З (2006) *Теор. физ., астрофиз.и космол.,* **1**, 1, 1.