Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **2**, N 2, с. 10 – 23, в1, 30 ноября 2007

Электрон.: ТФАК: 2525-007 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.2525-007

Квантование комплексного гармонического осциллятора и эффект сокращения нулевых энергий

Захид Закир [1]

Аннотация

Система двух гармонических осцилляторов с частотами разного знака представлена как положительно-частотный осциллятор с комплексной обобщённой координатой, где имеется глобальная *U*(1) симметрия, а также симметрия относительно зарядового сопряжения (*C*-симметрия). Показано, что две пары лестничных операторов, вводимые при частотном разложении канонических переменных, не являются взаимно зарядово–сопряжёнными, а обычная их интерпретация как операторов зарядово-сопряжённых квантов нарушает *C*-симметрию. Найдены билинейные операторные тождества для лестничных операторов, позволившие корректно учесть *C*-симметрию и выразить наблюдаемые через зарядово-сопряжённые операторы. Эти тождества сохраняются и при включении *C*-симметричных взаимодействий. Показано, что из-за *C*-симметрии в основном состоянии нет не только нулевого заряда, но и нулевой энергии. Соотношения неопределённостей обобщены для не эрмитовых канонических переменных и показано, что зарядово-симметричные основные состояния не квантуются и не флуктуируют как внешние поля. Показано, что *C*-симметричные взаимодействия не дают вклада в энергию основного состояния во всех порядках теории возмущений.

PACS: 03.65.Ge, 11.30.Er, 1130.Ly, 11.90.+t
Ключевые слова: гамильтонова динамика, дискретные симметрии, квантование, осциллятор, соотношения неопределённостей

Содержание

Введение

Квантование систем гармонических осцилляторов с различными симметриями всегда привлекало внимание в связи с проблемой нулевой энергии вакуума и из-за необычных эффектов этих симметрий. При этом, изменения процедур квантования систем гармонических осцилляторов не ограничивались рамками нерелятивистской квантовой механики и влияли на развитие многих прикладных и фундаментальных физических теорий.

---

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент, Узбекистан;*
zahidzakir@theor-phys.org

Такое исключительное положение этой задачи связано с тем, что понятие квантования многих систем в сущности сводилось к представлению их нормальных мод как наборов гармонических осцилляторов. На прямом перенесении модели нерелятивистского квантового осциллятора основаны не только стандартная квантовая теория релятивистских полей, но и попытки описания явлений на планковских расстояниях. Затруднения или внутренние противоречия в этих широко принятых подходах порождали подозрение, что правила квантования нерелятивистских систем не в достаточной мере удалось приспособить к релятивистским системам, имеющим и отрицательно-частотные моды.

Однако, модернизации квантового осциллятора сводились в основном к попыткам решения отдельных проблем, рассматривая их как технические затруднения, в частности, предлагались пути сокращения нулевой энергии. В то же время, для решения этой частной проблемы требовались радикальные изменения основ квантовой механике. Например, вводились отрицательно-частотные осцилляторы, сокращающие нулевые энергии, требовалось изменить правила сопоставления волновых функций и вероятностей из-за появления состояний с отрицательной нормой [1,2] (см. также [3]), вводились гипотетические мнимые координаты, мнимые массы и нереалистические граничные условия [4]. Тем не менее, эти попытки свидетельствовали о незавершённости устоявшихся процедур квантования и необходимости более внимательного анализа их вывода.

В данной статье и в следующих нескольких статьях будут представлены результаты, полученные при несколько ином подходе к проблеме. Предлагаемый подход основан на разумном консерватизме в отношении первых принципов и замене некоторых интуитивных гипотез, принятых при квантовании, более строгими процедурами, следующими из симметрий систем. Во-первых, мы будем строго соблюдать ограничения на наблюдаемые, налагаемые симметриями, характерными для релятивистских систем, в частности, симметрией между частицами и античастицами. Во-вторых, показывается, что для решения проблемы нулевой энергии в релятивистских системах достаточно соблюдения условий их базовых симметрий.

С этой целью последствия базовых дискретных симметрий физики частиц изучаются в более общем контексте (см. также [5-6]). В статье рассмотрена простейшая система с *симметрией относительно зарядового сопряжения* (C-симметрией) - система двух гармонических осцилляторов с противоположными по знаку частотами. При представлении этой системы как положительно-частотного *осциллятора с комплексной обобщённой координатой*, появляется $U(1)$ симметрия с сохраняющимся зарядом.

В квантовой теории поля при частотном разложении операторов полей вместо операторов отрицательно-частотных мод вводятся новые операторы рождения-уничтожения для положительно-частотных античастиц β^*, β. В результате, в гамильтониане появляется нулевая энергия из-за «ненормального» расположения чисто *интуитивно* введённых операторов античастиц:

$$H_0 = \omega\left(a^* a + \beta\beta^*\right) = \omega\left(a^* a + \beta^* \beta + 1\right). \qquad (1)$$

В настоящей статье будет показано, что если операторы античастиц b^*, b *определить* как зарядово-сопряжённые к операторам частиц a^*, a, то условия C-симметрии для гамильтониана и оператора заряда ведут к тождеству:

$$\beta\beta^* = b^* b. \qquad (2)$$

При этом, нулевая энергия в (1) не появится, а гамильтониан автоматически оказывается нормально-упорядоченным и выраженным через зарядово-сопряжённые операторы:

$$H_0 = \omega\left(a^* a + b^* b\right). \qquad (3)$$

В случае осциллятора с комплексной обобщённой координатой отрицательно-частотные кванты с тем же зарядом, идущие обратно во времени проявляются как зарядово-сопряжённые кванты положительной частоты, идущие вперёд во времени. В результате, прежняя симметрия относительно изменения знака частоты превращается в симметрию относительно зарядового сопряжения. При этом, основное состояние является зарядово-симметричным, а его средняя энергия и заряд остаются равными нулю.

Обычные соотношения неопределённостей, на которые ссылаются, доказывая неизбежность нулевых флуктуаций гармонического осциллятора и релятивистских полей, имеют силу только для *эрмитовых* канонических переменных. В статье получено обобщение соотношений неопределённостей для *неэрмитовых* канонических переменных, которые имеют вид:

$$\left|\delta q\right|^2 \left|\delta p\right|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}\left\langle Q\right\rangle^2, \qquad (4)$$

где $\left\langle Q\right\rangle$ - среднее от оператора заряда $i\left(q^* p^* - p q\right)$ в данном состоянии. Поскольку в зарядово-симметричных системах, например, в случае релятивистских полей, заряд основного состояния равен нулю $\left\langle Q\right\rangle_0 = 0$, то невозмущённое основное состояние этих систем есть не квантованное внешнее поле, у которого, очевидно, нет нулевых флуктуаций.

В первом разделе статьи описывается канонический формализм для комплексного гармонического осциллятора так, как это принято в теории полей. При этом, однако, вводимые при разложении обобщённых координат новые операторы β^*, β прямо не интерпретируются как лестничные операторы для зарядово-сопряжённого набора состояний. В разделе 2 рассматриваются условия C-симметрии, устанавливается операторное тождество между билинейными произведениями $\beta\beta^* = b^* b$ и показывается, что нулевой заряд и нулевая энергия не возникают. В разделе 3 выведены новые соотношения неопределённостей для не эрмитовых канонических переменных. В разделе 4 показывается, что C-симметричные взаимодействия на меняют операторные тождества. В разделах 5 и 6 рассматриваются взаимодействия с калибровочным полем и с ангармоническим потенциалом.

1. Канонический формализм для комплексного гармонического осциллятора

Система из двух гармонических осцилляторов с вещественными координатами q_1, q_2, с единичными массами и с противоположными по знаку частотами $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$ может быть представлена как положительно-частотный осциллятор с *комплексными* обобщёнными координатами:

$$q = \left(q_1 + iq_2\right)/\sqrt{2}, \qquad q^* = \left(q_1 - iq_2\right)/\sqrt{2} \tag{5}$$

и с лагранжианом:

$$L = \left(\partial_t q^*\right)\left(\partial_t q\right) - \omega^2 q^* q\,, \quad \left(\partial_t \equiv \partial/\partial t\right). \tag{6}$$

Канонические импульсы и гамильтониан системы имеют вид:

$$p = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_t q\right)} = \partial_t q^*, \quad p^* = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_t q^*\right)} = \partial_t q, \tag{7}$$

$$H = p\left(\partial_t q\right) + \left(\partial_t q^*\right)p^* - L = pp^* + \omega^2 q^* q\,. \tag{8}$$

Уравнения движения для комплексного осциллятора есть:

$$\partial_t^2 q + \omega^2 q^2 = 0\,, \quad \partial_t^2 q^* + \omega^2 q^{*2} = 0\,, \tag{9}$$

а квантование ведёт к коммутационным соотношениям:

$$i\left[p, q\right] = 1, \qquad i\left[p^*, q^*\right] = 1. \tag{10}$$

Общее решение уравнений движение включает моды как с положительными, так и с отрицательными частотами. В данной статье мы *исключим отрицательно-частотные состояния с самого начала* так, как это принято в теориях релятивистских полей, введя вместо оператора уничтожения отрицательно-частотных квантов $a_{-\omega}$ оператор рождения положительно-частотных квантов β^*. Это означает, что система из двух осцилляторов с противоположными по знаку частотами представлена как система из двух типов положительно-частотных осцилляторов с противоположными зарядами.

Тогда разложение обобщённых координат и импульсов на частотные компоненты имеет вид:

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a\,e^{-i\omega t} + \beta^* e^{i\omega t}\right), \quad & q^* &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(a^* e^{i\omega t} + \beta\,e^{-i\omega t}\right), \\ p &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}\left(a^* e^{i\omega t} - \beta\,e^{-i\omega t}\right), \quad & p^* &= \frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}}\left(a\,e^{-i\omega t} - \beta^* e^{i\omega t}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку обобщённые координаты q^*, q и импульсы p^*, p не эрмитовы, то операторы a^*, a коммутируют *с* β^*, β.

Обратные формулы имеют вид:

$$a = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q + ip^*\right), \quad a^* = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q^* - ip\right), \tag{12}$$

$$\beta = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q^* + ip\right), \quad \beta^* = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q - ip^*\right). \tag{13}$$

Соответствующие ненулевые коммутаторы для двух видов лестничных операторов, следующие из (10), есть:

$$\left[a, a^*\right] = 1, \qquad \left[\beta, \beta^*\right] = 1. \tag{14}$$

Гамильтониан (8) выраженный через эти операторы имеет вид:

$$H = \omega\left(a^* a + \beta\beta^*\right). \tag{15}$$

Здесь произведение операторов $\beta\beta^*$ упорядочено «ненормально».

Стандартный подход к квантованию комплексных полей (представляемых как совокупности комплексных осцилляторов), основывался на *предположении*, что операторы β^*, β являются зарядово-сопряжёнными к операторам a^*, a. Как результат этой гипотезы, после очевидной замены $\beta\beta^*$ на $\beta^*\beta + 1$, появлялись *нулевая энергия* и *нулевой заряд*. Однако, как будет показано далее в разделе 3, такое общепринятое интуитивное отождествление операторов β^*, β в действительности оказывается недопустимым, поскольку ведёт к нарушению C-симметрии.

2. Симметрии комплексного осциллятора и их следствия

В случае осциллятора с комплексными обобщёнными координатами и с лагранжианом (6) имеет место глобальная $U(1)$ симметрия:

$$q' = UqU^{-1}, \quad U = \exp\left(i\theta Q\right) \tag{16}$$

с сохраняющимся зарядом $\partial_t Q = 0$, где оператор заряда Q определён как:

$$\frac{\delta L}{\delta\theta} = \frac{\partial L}{\partial\left(\partial_t q\right)}\left(-iq\right) + \left(iq^*\right)\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_t q^*\right)} = Q, \tag{17}$$

$$Q = i\left[q^*\partial_t q - \left(\partial_t q^*\right)q\right] = i\left(q^* p^* - p\,q\right) = a^* a - \beta\beta^* . \tag{18}$$

Этот оператор заряда содержит произведения обобщённых координат и импульсов и при квантовании возникает проблема их упорядочения. В обобщении теоремы Нётер для комплексных координат (17) второе слагаемое должно быть эрмитово-сопряжённым к первому, чтобы соответствующий оператор заряда (18) был эрмитовым. Далее в этой статье будет рассмотрен только оператор заряда (18), следующий из стандартного лагранжиана (6), а более сложные упорядочения будут рассмотрены в последующих публикациях.

В системе из двух осцилляторов с одинаковыми массами и частотами $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ кванты двух осцилляторов неразличимы и имеется симметрия относительно их взаимной перестановки.

Если же осцилляторы различаются знаками частоты $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$, то при взаимной замене квантов двух типов необходимо изменить и знаки их частот. Когда же эта система представляется как положительно-частотный комплексный осциллятор, описывающий два типа квантов противоположного заряда, то прежняя симметрия трансформируется в симметрию относительно *зарядового сопряжения* (C-симметрия). Зарядовое сопряжение C определяется обычным образом как операция, при которой кванты с определённым зарядом заменяются на кванты противоположного заряда. При этом, гамильтониан инвариантен, а оператор заряда меняет знак:

$$H_c \equiv C H C^{-1} = H, \qquad Q_c \equiv C Q C^{-1} = -Q. \tag{19}$$

Наличие этой операции симметрии ведёт к существованию лестничных операторов, зарядово-сопряжённых к ранее введённым:

$$b = C a C^{-1}, \quad b^* = C a^* C^{-1}, \qquad \alpha = C \beta C^{-1}, \quad \alpha^* = C \beta^* C^{-1}, \tag{20}$$

и удовлетворяющих коммутационным соотношениям, следующим из (14):

$$i\left[b, b^*\right] = 1, \qquad i\left[\alpha, \alpha^*\right] = 1. \tag{21}$$

Операторы a, a^* и b, b^* определяют основное и возбуждённые состояния $\left|n_\pm\right\rangle$ для квантов противоположного заряда:

$$\begin{aligned} &a\left|0_+\right\rangle = 0, \quad a\left|n_+\right\rangle = \sqrt{n_+}\left|n_+ - 1\right\rangle, \quad a^*\left|n_+\right\rangle = \sqrt{n_+ + 1}\left|n_+ + 1\right\rangle, \\ &b\left|0_-\right\rangle = 0, \quad b\left|n_-\right\rangle = \sqrt{n_-}\left|n_- - 1\right\rangle, \quad b^*\left|n_-\right\rangle = \sqrt{n_- + 1}\left|n_- + 1\right\rangle. \end{aligned} \tag{22}$$

В частности, *C*-сопряжение переставляет числа заполнения квантов с положительным и отрицательным зарядами в состояниях комплексного осциллятора:

$$C\left|n_{1+}, n_{2-}\right\rangle = \left|n_{2+}, n_{1-}\right\rangle. \tag{23}$$

Соответствующие *C*-сопряжённые обобщённые координаты и импульсы:

$$\begin{aligned} q_c &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(b\, e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right), \qquad q_c^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(b^* e^{i\omega t} + \alpha\, e^{-i\omega t}\right), \\ p_c &= \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}\left(b^* e^{i\omega t} - \alpha\, e^{-i\omega t}\right), \qquad p_c^* = \frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}}\left(b\, e^{-i\omega t} - \alpha^* e^{i\omega t}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$i\left[p_c, q_c\right] = 1, \qquad i\left[p_c^*, q_c^*\right] = 1. \tag{25}$$

Обратные формулы для новых лестничных операторов имеют вид:

$$b = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q_c + i p_c^*\right), \quad b^* = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q_c^* - i p_c\right),$$
$$\alpha = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q_c^* + i p_c\right), \quad \alpha^* = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q_c - i p_c^*\right). \tag{26}$$

Волновые функции основного состояния для квантов обоих типов:

$$\left|0_+\right\rangle = \psi_{0+}\left(q^*, q\right) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\, e^{-\omega q^* q}, \quad \left|0_-\right\rangle = \psi_{0-}\left(q_c^*, q_c\right) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\, e^{-\omega q_c^* q_c} \tag{27}$$

нормированы как:

$$\int dq^* dq \psi_{0+}^2\left(q^*, q\right) = \int dq_c^* dq_c\, \psi_{0-}^2\left(q_c^*, q_c\right) = 1. \tag{28}$$

Зарядово-сопряжённые гамильтониан H_c и оператор заряда Q_c при этом выражаются через новые операторы, введённые в (26), как:

$$H_c = \omega\left(b^* b + \alpha\,\alpha^*\right),$$
$$Q_c = b^* b - \alpha\,\alpha^*. \tag{29}$$

Если условия C-симметрии (19) записать в развёрнутом виде:

$$H = \omega\left(a^* a + \beta\beta^*\right) = \omega\left(b^* b + \alpha\,\alpha^*\right) = H_c,$$
$$Q = a^* a - \beta\beta^* = -\left(b^* b - \alpha\,\alpha^*\right) = -Q_c, \tag{30}$$

то получим два условия связи для четырёх билинейных комбинаций лестничных операторов:

$$a^* a + \beta\beta^* = b^* b + \alpha\,\alpha^*,$$
$$a^* a - \beta\beta^* = -b^* b + \alpha\,\alpha^*. \tag{31}$$

Складывая и вычитая эти равенства, два произведения вспомогательных операторов $\beta\beta^*$ и $\alpha\,\alpha^*$ можем выразить через произведения операторов взаимно зарядово-сопряжённых квантов $a^* a$ и $b^* b$:

$$\alpha\,\alpha^* = a^* a,$$
$$\beta\,\beta^* = b^* b. \tag{32}$$

Эти соотношения позволяют вычислить большинство матричных элементов от произведений вспомогательных операторов.

Итак, используя найденные тождества (32), выражения для гамильтониана и заряда теперь можем записать в окончательном виде:

$$H = \omega\left(a^* a + b^* b\right) = H_c,$$
$$Q = a^* a - b^* b = -Q_c. \tag{33}$$

Нетривиальность ситуации состоит в том, что операторы b, b^*, определяющие состояния и наблюдаемые для квантов зарядово-сопряжённых к обычным, входят в разложение обобщённых координат и импульсов (11) не напрямую, а через вспомогательные операторы β^*, β, с которыми связаны только через билинейные комбинации (32).

Если, как это общепринято в квантовой теории поля, мы с самого начала отождествили бы операторы β, β^* с b, b^*, полагая β, β^* зарядово-сопряжёнными к a, a^*, то пришли бы к нарушению *C*-симметрии. В самом деле, общепринятая интуитивная гипотеза:

$$\beta = b,\ \beta^* = b^* \tag{34}$$

означает, в соответствии с (32), что $\beta\beta^* = \beta^*\beta$, $bb^* = b^*b$ и далее, после зарядового сопряжения, $aa^* = a^*a$. Поскольку лестничные операторы a, a^* не могут коммутировать, то для сохранения гипотезы (34) условия *C*-симметрии (19) должны были бы быть нарушены.

Мы же поступили наоборот и, сохранив условия симметрии (19), воздержались от введения гипотезы (34). При этом, сами же условия (19) затем позволили установить связи (32) между этими двумя наборами лестничных операторов и выразить $\beta\beta^*$ через b^*b.

3. Новые соотношения неопределённостей для комплексных канонических переменных и энергия основного состояния

Гармонический осциллятор играл ключевую роль на всех этапах возникновения и применения квантовой теории. История почти каждого нового физического свойства квантовых систем начиналась с применения к этой простой задаче. Одной из них является соотношение неопределённостей, применение которого к флуктуациям координат и импульсов осциллирующей частицы в основном состоянии гармонического осциллятора с простым выводом его нулевой энергии был триумфом этой теории.

Поэтому, попытки квантования систем без нулевой энергии интуитивно воспринимались как выход за рамки стандартной квантовой механики. Однако, также известно, что во многих системах с различными потенциалами и симметриями нет нулевых энергий, а энергия основного состояния может исчезать без противоречия со стандартной квантовой механикой.

В данной статье отрицательно-частотные кванты представлены как зарядово-сопряжённые кванты с положительной энергией. Как показано в предыдущем разделе, оказывается, что эффект исчезновения нулевых энергий тем не менее сохраняется и здесь возникает вопрос о соотношении неопределённостей для такого основного состояния. Поэтому, рассмотрим эту проблему применительно к нашему случаю.

Стандартный вывод соотношений неопределённостей Гейзенберга имеет силу только для эрмитовых канонических переменных. В нашем случае, где канонические переменные не эрмитовы, необходимо соответствующее обобщение соотношений неопределённостей.

Определения среднеквадратичных флуктуаций, когда средние значения равны нулю, имеют вид:

$$|\delta q|^2 = \overline{q^* q} = \int dq^* dq \psi^* |q|^2 \psi, \tag{35}$$

$$|\delta p|^2 = \overline{p^* p} = \int dq^* dq \psi^* |p|^2 \psi = -\hbar^2 \int dq^* dq \psi^* \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial}{\partial q^*} \psi. \tag{36}$$

Здесь операторы импульса определены как:

$$p\psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \psi, \quad p^* \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^*} \psi. \tag{37}$$

Рассмотрим обобщение стандартного неравенства с положительно-определённой квадратичной формой для комплексных канонических переменных:

$$\int dq^* dq \left(\lambda q^* \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial q} \right) \left(\lambda q \psi + \frac{\partial \psi}{\partial q^*} \right) \geq 0, \tag{38}$$

где λ - вещественное число. Здесь, кроме членов, пропорциональных $|\delta q|^2$ и $|\delta p|^2$, будут и перекрёстные члены:

$$\begin{aligned} &\int dq^* dq \left(\psi_n^* q^* \frac{\partial \psi_n}{\partial q^*} + \frac{\partial \psi_n^*}{\partial q} q \psi_n \right) = \\ &= \frac{i}{\hbar} \int dq^* dq \psi_n^* \left(q^* p^* - pq \right) \psi_n = \langle n | Q | n \rangle = \langle Q \rangle, \end{aligned} \tag{39}$$

где Q - оператор заряда (18).

Для гармонического осциллятора с вещественными каноническими переменными выражение $q^* p^* - pq$ переходит в коммутатор $(qp - pq) = i\hbar$, а матричный элемент в $\langle n | Q | n \rangle = -1$, что затем ведёт к стандартному соотношению неопределённостей:

$$\delta q^2 \delta p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \tag{40}$$

В рассматриваемом же нами общем случае неравенство (38) превращается в квадратичное неравенство для коэффициента λ:

$$|\delta q|^2 \lambda^2 + \lambda \langle Q \rangle + \frac{1}{\hbar^2} |\delta p|^2 \geq 0. \tag{41}$$

Неравенство имеет вещественные решения при условии отрицательности дискриминанта:

$$|\delta q|^2 |\delta p|^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \langle Q \rangle^2. \tag{42}$$

Это и есть обобщение соотношения неопределённостей для неэрмитовых канонических переменных.

Так как заряд основного состояния исчезает из-за зарядовой симметрии:

$$\langle 0|Q|0\rangle = 0, \tag{43}$$

то неравенства (41) и (42) становятся тривиальными и такими, как в классической механике:

$$|\delta q|^2 \lambda^2 + \frac{1}{\hbar^2}|\delta p|^2 \geq 0, \tag{44}$$

$$|\delta q|^2 |\delta p|^2 \geq 0. \tag{45}$$

Это означает, что в основном состоянии невозмущённого комплексного осциллятора, где нет квантов, канонические переменные не квантуются, а само состояние такое же, как в классической механике. Ясно, что для одночастичных состояний нерелятивистской квантовой механики это невозможно, поскольку частицы в этих состояниях описываются эрмитовыми каноническими переменными. Но это кстати для релятивистских полей, которые в большинстве случаев описываются неэрмитовыми каноническими переменными и где есть зарядовая симметрия. В этом случае новые соотношения неопределённостей (42), при занулении заряда основного состояния, ведут к (45) и показывают, что основное состояние релятивистских полей есть не квантованное внешнее поле, которое не флуктуирует. Плотность энергии такого вакуума как внешнего поля такая же, как в классическом случае и не содержит нулевой энергии.

4. Сохранение операторных тождеств при включении *C*-симметричных взаимодействий

Рассмотрим далее C-симметричные потенциалы, так как, во-первых, новые свойства комплексного осциллятора следуют в основном из этой симметрии и, во-вторых, в наиболее важных применениях комплексного осциллятора взаимодействия обладают этой симметрией (хотя бы в комбинации с другими симметриями).

Итак, кроме условий симметрии для невозмущённого случая (19), у нас теперь есть дополнительное условие C-симметрии для потенциала:

$$V\left(q^*, q\right) = V_c\left(q_c^*, q_c\right), \tag{46}$$

где $V_c = CVC^{-1}$. Полный гамильтониан также будет C-симметричным и для потенциалов, не меняющих Q, удовлетворяет аналогичным условиям:

$$\begin{aligned} H &= \omega\left(a^*a + \beta\beta^*\right) + V = \omega\left(b^*b + \alpha\alpha^*\right) + V_c = H_c, \\ Q &= a^*a - \beta\beta^* = -\left(b^*b - \alpha\alpha^*\right) = -Q_c. \end{aligned} \tag{47}$$

Как видим, благодаря C-симметрии потенциала (46), в условии для гамильтониана (47) вклады потенциалов взаимодействия в обоих частях равенства сокращаются. В результате, условие (47) для полного гамильтониана сводится к прежнему условию (19) для невозмущённого гамильтониана, что означает справедливость прежних операторных тождеств (32) и в присутствии C-симметричных потенциалов взаимодействия.

Если вклад потенциала взаимодействия вычисляется по теории возмущений, то матричные элементы ряда теории возмущений в каждом порядке будет связаны условиями C-симметрии. Энергии зарядово-сопряжённых уровней должны быть одинаковыми, а матричные элементы будут связаны цепочками условий:

$$\begin{gathered} \langle n_+|V|n_+\rangle = \langle n_+|C^{-1}V_cC|n_+\rangle = \langle n_-|V_c|n_-\rangle, \\ \langle n_+|V|n_\pm{}'\rangle\langle n_\pm{}'|V|n_+\rangle = \langle n_-|V_c|n_\mp{}'\rangle\langle n_\mp{}'|V_c|n_-\rangle, \ldots \end{gathered} \tag{48}$$

Рассмотрим теперь $U(1)$ симметрию с зависящим от времени параметром преобразования $\theta(t)$:

$$q' = UqU^{-1}, \quad U = \exp\left[i\theta(t)Q\right]. \tag{49}$$

Взаимодействие с внешним калибровочным полем ϕ вводится путём удлинения производных по времени $D_t = \partial_t - i\phi$. Калибровочное поле преобразуется как $\phi' = \phi + i\partial_t\theta$ и при зарядовом сопряжении меняет знак: $\phi_c = C\phi C^{-1} = -\phi$. Включение этого взаимодействия в лагранжиан даёт:

$$L = \left(D_t q\right)^* \left(D_t q\right) - \omega^2 q^* q = L_0 + Q_\phi \phi, \tag{50}$$

где L_0 - невозмущённый лагранжиан, а полный гамильтониан и оператор заряда с внешним полем имеют вид:

$$\begin{gathered} H = H_0 + \phi Q + \phi^2 q^* q \\ Q_\phi = Q + \phi q^* q. \end{gathered} \tag{51}$$

Для них условия C-симметрии есть:

$$H = H_c, \quad Q_\phi = -Q_{\phi c}. \tag{52}$$

которые в более подробной записи имеют вид:

$$\begin{gathered} H_0 + \phi Q + \phi^2 q^* q = H_{0c} - \phi Q_c + \phi^2 q_c^* q_c, \\ Q + \phi q^* q = -\left(Q_c - \phi q_c^* q_c\right). \end{gathered} \tag{53}$$

Используя прежние условия симметрии для невозмущённого гамильтониана и заряда, получаем новое уравнение связи для произведений обобщённых координат:

$$q^* q = q_c^* q_c, \tag{54}$$

которое, после подстановки явных выражений даёт соотношение:

$$e^{2i\omega t}\left(a^*\beta^* - b^*\alpha^*\right) = e^{-2i\omega t}\left(\alpha b - \beta a\right). \tag{55}$$

Отсюда, в частности, получаем связи между матричными элементами:

$$\begin{gathered} e^{2i\omega t}\langle 1,1|\left(a^*\beta^* - b^*\alpha^*\right)|0,0\rangle = e^{-2i\omega t}\langle 1,1|\left(\alpha b - \beta a\right)|0,0\rangle = 0, \\ e^{-2i\omega t}\langle 0,0|\left(\alpha b - \beta a\right)|1,1\rangle = e^{2i\omega t}\langle 0,0|\left(a^*\beta^* - b^*\alpha^*\right)|1,1\rangle = 0, \end{gathered} \tag{56}$$

что даёт дополнительные соотношения между матричными элементами вспомогательных операторов:

$$\begin{aligned}\langle 0,1|\beta^*|0,0\rangle &= \langle 1,0|\alpha^*|0,0\rangle,\\ \langle 0,0|\beta|0,1\rangle &= \langle 0,0|\alpha|1,0\rangle.\end{aligned} \tag{57}$$

Итак, тождества для лестничных операторов не меняются при C-симметричном включении взаимодействий, а из C-симметрии невозмущённого гамильтониана следуют тождества (57) для матричных элементов.

5. Энергия основного состояния при возмущении калибровочным полем

Важно также выяснить, как изменится энергия основного состояния при включении взаимодействий в случае, когда нет нулевой энергии в невозмущённом гамильтониане. Рассмотрим сначала возмущение внешним калибровочным полем.

Поскольку оператор заряда Q диагонален и лестничные операторы нормально-упорядочены, то Q не даёт вклада в вакуумные средние во всех порядках теории возмущений.

Ненулевые вакуумные средние могут быть только из-за члена с внешним полем $\phi q^* q$. Однако, во-первых, эти вклады очевидным образом исчезают при снятии внешнего поля, а во-вторых, можно показать, что при условии C-симметрии они исчезают и при ненулевом внешнем поле.

Действительно, в первом порядке теории возмущений имеем:

$$\begin{aligned}&2\omega\langle 0|H|0\rangle = 2\omega\phi^2\langle 0|q^*q|0\rangle =\\ &=\langle 0|\left(a^*a+\beta\beta^*+e^{2i\omega t}a^*\beta^*+e^{-2i\omega t}\beta a\right)|0\rangle =\\ &=\phi^2\langle 0|\beta\beta^*|0\rangle = \phi^2\langle 0|b^*b|0\rangle = 0.\end{aligned} \tag{58}$$

Ввиду коммутативности координат, аналогичный результат получится и при другом упорядочении и C-сопряжении:

$$2\omega\langle 0|qq^*|0\rangle = \langle 0|aa^*+\beta^*\beta|0\rangle = \langle 0|a^*a+\beta\beta^*|0\rangle = 0. \tag{59}$$

$$2\omega\langle 0|q_c^*q_c|0\rangle = \langle 0|b^*b+\alpha\alpha^*|0\rangle = \langle 0|b^*b+a^*a|0\rangle = 0. \tag{60}$$

Матричные элементы от $\left(q^*q\right)^2$ и $\left(q_c^*q_c\right)^2$, входящие во вклады второго порядка теории возмущений, взятые без учёта временных факторов, также зануляются ввиду операторных тождеств:

$$\sum_{n_1,n_2}\left\langle 0\left|q^*q\right|n_1,n_2\right\rangle\left\langle n_1,n_2\left|q^*q\right|0\right\rangle \sim \left\langle 0\left|\beta\right|0,1\right\rangle\left\langle 0,1\left|\beta^*\right|0\right\rangle = \left\langle 0\left|\beta\beta^*\right|0\right\rangle = 0. \tag{61}$$

Из-за коммутативности координат, все эти результаты также не зависят от упорядочения. Несколько иначе зануляются только матричные элементы от перекрёстных членов, для которых надо использовать соотношения (57):

$$\sum_{n_1,n_2} \langle 0|q^*q|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|q_c^*q_c|0\rangle \sim \langle 0,0|\beta|0,1\rangle\langle 1,0|\alpha^*|0,0\rangle = \\ = \langle 0,0|\beta|0,1\rangle\langle 0,1|\beta^*|0,0\rangle = \langle 0,0|\beta\beta^*|0,0\rangle = 0. \quad (62)$$

Отсутствие вкладов в энергию основного состояния в более высоких порядках теории возмущений показывается по аналогичной схеме. Дело в том, что все матричные элементы высших порядков содержат два калибровочно-инвариантных простейших матричных элемента $\langle 0|q^*q|n_1,n_2\rangle$ и $\langle n_1,n_2|q^*q|0\rangle$, произведение которых исчезает:

$$\sum_{\substack{n_1,n_2,\\ n_1',n_2'...}} \langle 0|q^*q|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|q^*q|n_1',n_2'\rangle...\langle n_1'',n_2''|q^*q|0\rangle = \\ = \sum_{n_1,n_2} \langle 0|q^*q|n_1,n_2\rangle\langle n_1,n_2|q^*q|0\rangle \sum_{n_1',n_2'...} \langle n_1,n_2|q^*q|n_1',n_2'\rangle... = 0. \quad (63)$$

Эффекты, связанные с зависящими от времени и неоднородными возмущениями, а также индуцированное рождение пар квантов в присутствии других квантов в случае комплексного осциллятора будут рассмотрены в последующих публикациях.

6. Энергия основного состояния при ангармонических возмущениях

Симметрии комплексного осциллятора допускают только калибровочно-инвариантные потенциалы с членами вида $(q^*q)^n$, $(q_c^*q_c)^n$ (включая и их произведения) сохраняющие заряд.

Из допустимых потенциалов $n=1$ (гармонический потенциал) мы и изучали, а здесь рассмотрим ангармонический потенциал 4-порядка ($n=2$), который в общем случае имеет вид:

$$V = \lambda\left(q^*q + q_c^*q_c\right)^2. \quad (64)$$

где λ - размерная константа взаимодействия.

Вклад в энергию основного состояния в первом порядке теории возмущений даётся матричным элементом от потенциала и два из них исчезают из-за операторных тождеств :

$$\langle 0|V_{(a)}^{(1)}|0\rangle = \lambda\langle 0|q^*q^*qq|0\rangle = \lambda\langle 0|a^*a^*\beta\beta + \beta\beta\beta^*\beta^*|0\rangle = 0. \quad (65)$$

$$\langle 0|V_{(a)}^{c(1)}|0\rangle = \lambda\langle 0|q_c^*q_c^*q_cq_c|0\rangle = \lambda\langle 0|b^*b^*\alpha\alpha + \alpha\alpha\alpha^*\alpha^*|0\rangle = 0. \quad (66)$$

Ввиду коммутативности обобщённых координат другие упорядочения дадут тот же результат. Смешанный матричный элемент также исчезает:

$$\langle 0|V_{(m)}^{(1)}|0\rangle = \lambda\langle 0|q^*q_c^*qq_c|0\rangle = \langle 0|a^*b^*\beta^*\alpha^* + \beta\beta^*\alpha\alpha^*|0\rangle = 0 \quad (67)$$

Итак, в первом порядке ряда теории возмущений нет ангармонических вкладов в энергию вакуума заряженного скалярного поля.

Вклады в энергию одночастичных состояний типа диаграмм «пузырь» также исчезают:

$$\left\langle 1,0\right|V^{(1)}\left|1,0\right\rangle = \lambda\left\langle 1,0\right|\left(q^{*}q+q_{c}^{*}q_{c}\right)^{2}\left|1,0\right\rangle = 0,$$
$$\left\langle 0,1\right|V^{(1)}\left|0,1\right\rangle = \lambda\left\langle 0,1\right|\left(q^{*}q+q_{c}^{*}q_{c}\right)^{2}\left|0,1\right\rangle = 0. \tag{68}$$

Во втором порядке явно неисчезающим и разрешённым сохранением заряда оказывается только матричный элемент с переходом в промежуточное состояние с двумя парами квантов и антиквантов, который также зануляется:

$$\left\langle 0\right|V^{(2)}\left|0\right\rangle \sim \lambda^{2}\left\langle 0\right|\left(q^{*}q+q_{c}^{*}q_{c}\right)^{2}\left|2,2\right\rangle\left\langle 2,2\right|\left(q^{*}q+q_{c}^{*}q_{c}\right)^{2}\left|0\right\rangle = 0. \tag{69}$$

Матричные элементы в высших порядках теории возмущений также, зануляются, поскольку начальный и конечный матричные элементы, связанные с основным состоянием, факторизуются, а их произведение исчезает:

$$\sum_{\substack{n_1,n_2,\\ n_1',n_2'...}} \left\langle 0\right|\left(\phi^{*}\phi\right)^{2}\left|n_1,n_2\right\rangle\left\langle n_1,n_2\right|\left(\phi^{*}\phi\right)^{2}\left|n_1',n_2'\right\rangle ...\left\langle n_1'',n_2''\right|\left(\phi^{*}\phi\right)^{2}\left|0\right\rangle =$$
$$= \sum_{n_1,n_2}\left\langle 0\right|\left(\phi^{*}\phi\right)^{2}\left|n_1,n_2\right\rangle\left\langle n_1,n_2\right|\left(\phi^{*}\phi\right)^{2}\left|0\right\rangle \sum_{n_1',n_2'...}\left\langle n_1,n_2\right|\left(\phi^{*}\phi\right)^{2}\left|n_1',n_2'\right\rangle ... = 0. \tag{70}$$

Матричные элементы для возбуждённых состояний и перенормировка параметров исходного лагранжиана будут изучены в последующих статьях.

Заключение

Итак, при введении лестничных операторов зарядово–сопряжённых квантов согласование с условиями C-симметрии нетривиально и только новые операторные тождества между билинейными произведениями лестничных операторов позволяют корректно учесть симметрийные требования.

При этом оказывается, что C-симметрия ведёт к новому и также нетривиальному эффекту – к естественному нормальному упорядочению операторов и к исчезновению нулевой энергии комплексного осциллятора. Более того, при включении C-симметричных взаимодействий энергия основного состояния остаётся равной нулю во всех порядках теории возмущений.

Для систем с не эрмитовыми каноническими переменными имеет место более общие соотношения неопределённостей. Из них следует, что в основном состоянии зарядово-симметричных систем (например, релятивистских полей) нет нулевой энергии и они не флуктуирует как и классические внешние поля.

В последующих публикациях новый метод C-симметричного квантования комплексного гармонического осциллятора будет применяться к цепочке связанных осцилляторов и к релятивистским полям.

Литература

1. Dirac P.A.M. (1942) *Proc. Roy. Soc*., L., **A114**, 243, 710.
2. Pauli W. (1943) *Rev. Mod.* Phys., **15**, 175.
3. Moffat J. (2006) *Phys. Lett*., **B627**, 9.
4. ‘t Hooft G., Nobbenhuis S. (2006) arxiv: 0602076.
5. Закир З. (2006) *Теор.физ.,астрофиз. и космол*.,**1**,1, 12;**1**, 4, 67; (2007) arXiv:0705-0899.