Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **1**, N 2, с. 30 – 44, в1, 29 сентября 2006

Электрон.: ТФАК: 2098-003 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.2098-003

Квантовая теория поля без расходимостей при корректном интегрировании по времени

Захид Закир [1]

Аннотация

Квантовомеханические траектории, в том числе, в пространстве полевых функций, не дифференцируемы по времени и интегралы по путям определены только на временной решётке с конечным шагом. Поэтому, в КТП все петлевые интегралы должны вычисляться до перехода к пределу очень малых времён, когда они конечны. Перенормируемые теории инвариантны относительно изменения шага временной решётки. Это – новая пространственно-временная симметрия, расширяющая группу Пуанкаре, и она ранее была открыта в теории поля в форме ренормгруппы. Таким образом, квантование требует суммирования по всем альтернативам, т.е. интегрирования по энергиям, до перехода к очень малым временам и это ведёт к естественной регуляризации петлевых интегралов. Это узаконивает методы регуляризации как следствия временной регуляризации, следующей из фрактальности траекторий. Релятивистски-ковариантный планковский интервал времени оказывается наименьшим из-за гравитационного замедления времени и красного смещения частот у источника с планковской энергией. Стандартная КТП с такой ковариантной и конечной регуляризацией является математически корректной и физически состоятельной.

PACS: 11.10.Gh, 11.10.Hi, 11.15.Ha, 11.10.Ly, 12.20.-m
Ключевые слова: квантование, симметрии, перенормировка, решёточная регуляризация

Содержание

Введение ... **31**
1 Роль временной решётки в квантовой механике ... **33**
1.1 Фрактальность квантово-механических траекторий ... 33
1.2 Переход к малым временам после суммирования по всем альтернативам ... 33
2 Квантование полей на временной решётке ... **34**
2.1 Фрактальность траекторий в пространстве полевых функций ... 34
2.2 Зависимость затравочного лагранжиана от шага временной решётки ... 35
2.3 Теория возмущений с естественной временной регуляризацией ... 36
3 Конечность петлевых диаграмм при переходе к малым временам ... **38**
3.1 Конечность однопетлевых диаграмм ... 38
3.2 Конечность многопетлевых диаграмм ... 39
3.3 Зануление физической энергии вакуума в КТП ... 39
4 Некоторые следствие временной регуляризации ... **40**
4.1 Стандартные регуляризации как следствия временной регуляризации ... 40
4.2 Ренормгруппа как следствие подобия во временной регуляризации ... 40
4.3 Общая пространственно-временная симметрия КТП ... 41
Заключение ... **44**
Литература ... **44**

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики, Ташкент, Узбекистан;* zahidzakir@theor-phys.org

Введение

В стандартной квантовой теории поля (КТП) имеются расходимости в петлевых диаграммах, которые устраняются путём добавления в лагранжиан бесконечных контрчленов. Необходимость оперирования с бесконечными членами в теории возмущений всегда воспринималась как свидетельство логической незавершённости теории [1-4].

Самое простое объяснение состоит в том, что члены ряда теории возмущений на самом деле конечны, но только стандартная формулировка КТП не полна и требуются дополнительные уточнения. Но, многолетние попытки усовершенствования формулировок без изменения основ теории не дали желаемого результата, непреодолимыми оказались и трудности с квантованием гравитации. В результате, большинство попыток избежать расходимостей за последние десятилетия были направлены на изменение основ стандартной КТП, в особенности, принципа локальности [4], без каких-либо наблюдательных свидетельств для ревизии базовых принципов.

В этой ситуации будет разумным вновь вернуться к уточнению формулировок физических основ хорошо работающей теории, предполагая, что проблемы расходимостей могли быть связаны с недостатками исторически сложившихся формулировок. Это тем более уместно, если учесть, что аналогичные попытки на практике концентрировались вокруг небольшого количества подходов, часть из которых была не совсем правильно понята и была недостаточно развита, другие не были обоснованы, а большинство сводилось к техническим приёмам, не заботясь о физическом обосновании.

В частности, весьма эффективная для численного моделирования квантовых полей решёточная регуляризация существует в *двух модификациях*. В первой вводится *пространственная решётка с непрерывным временем*, а во второй – *решётка по всем пространственно-временным координатам*. Таким образом, дискретизация пространства считалась более важной, чем времени и решёточная регуляризация использовалась как чисто технический приём [3,5].

В то же время, *третья* из возможных версий решёточной регуляризации, которая, как будет показано в данной статье, имеет прямой физический смысл, следуя из принципов квантовой механики, не развивалась, хотя и часто использовалась как формальный приём при определении эволюций во времени. Эта версия состоит в обязательном введении конечной *решётки по временной координате, а пространство может считаться непрерывном*. В этом случае поля и события задаются локальным образом, однако *интервалы времени* между событиями всегда имеют элемент *нелокальности*, характерный для всех квантовых систем.

Как известно, главным в проблеме устранения ультрафиолетовых расходимостей является не столько процедура *перенормировок* регуляризованных выражений, что естественно в присутствии взаимодействий, сколько физическая основа для процедуры *регуляризации*. В данной статье будет развита точка зрения, что *кроме локальности в пространстве есть ещё две фундаментальные физические причины для регуляризаций* и что все успешные процедуры квантования в явном или скрытом виде содержат эти физические регуляризации.

Эти физически причины следует из двух известных фактов:

1) *квантовомеханические траектории,* в том числе, и в пространстве полевых функций, *не дифференцируемы во времени* и фрактальны относительно временной эволюции [1];

2) на планковских расстояниях l_{pl} имеет место гравитационное замедление собственных времён процессов по сравнению с мировым временем удалённых наблюдателей [7].

Первое свойство требует малых, но конечных интервалов времени $\Delta t > 0$ между причинно-связанными процессами, а второе ведёт к тому, что планковское время τ_{pl} фактически есть наименьший возможный временной интервал между такими событиями $\Delta t > \tau_{pl}$ (с точностью до численного коэффициента) [7].

Во всех методах квантования полей, имея дело с операциями дифференцирования и интегрирования по времени, подразумевалось, что речь идёт о введении конечных разностей с шагом Δt, с последующим переходом к пределу очень малых времён. Введение такой временной решётки достаточно для сходимости интегралов по энергии в петлевых диаграммах. Поэтому, в рамках теории возмущений при конечных $\Delta t > \tau_{pl}$ петлевые вклады будут конечными, а в перенормируемых теориях будут и достаточно малыми.

Весьма важно также то, что дискретизация времени - свойство инерциальных систем отсчёта (ИСО), где все процессы и описываются. Поэтому, ИСО с разным шагом решётки времени Δt и $\Delta t'$ могут быть преобразованы друг в друга и это - *новая симметрия таких ИСО*, в дополнение к вращениям и трансляциям. Такая расширенная группа преобразований систем отсчёта, которая только и имеет физическое значение при описании квантовых систем, включает, в дополнение к группе Пуанкаре, также *преобразования шага временной решётки* $\Delta t \to \Delta t'$. Физические следствия новой пространственно-временной симметрии были обнаружены ранее в скрытой форме при описании полей в импульсном представлении как *ренормгрупповая* симметрия [2-5].

В первом разделе статьи будет показано, что в квантовой теории к пределу очень малых времён можно переходить только после суммирования по всем альтернативам, т.е. после суммирования по энергиям и импульсам, и что эти операции нельзя переставлять из-за фрактального характера квантовомеханических траекторий. Во втором разделе будет показано, что такое изменение в математическом аппарате КТП, с учётом и существования нижнего предела для шага решётки $\Delta t > \tau_{pl}$, достаточно для конечности петлевых интегралов. Такое физическое обоснование методов перенормировок с рассмотрением новой пространственно-временной симметрии приводится в разделе 3.

1 Роль временной решётки в квантовой механике

1.1 Фрактальность квантово-механических траекторий

Как известно, для квантованных систем (частиц и полей) канонические переменные классической механики имеют смысл в пределах, ограниченных соотношениями неопределённостей. Но то, что координаты и импульсы квантовых частиц одновременно точно не измеримы, свидетельствует, конечно же, не о том, что у них нет траектории вообще, а лишь о том, что это другой тип траектории, чем классические траектории.

Классические траектории непрерывны и дифференцируемы во времени. Как известно, квантово-механические траектории также непрерывны, но не имеют производных по времени [1]. Но это свойство траекторий не является чем-то необычным даже в самой классической механике, поскольку траектория классической частицы, совершающей броуновское движение, также не имеет производной по времени и её координаты и импульсы также одновременно точно не измеримы.

Фрактальность траектории квантовой частицы проявляется в том, что среднеквадратичное значение скорости в промежутке времени Δt обратно пропорционально Δt:

$$\left\langle \left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \right)^2 \right\rangle \sim \frac{1}{\Delta t}. \tag{1}$$

и в пределе $\Delta t \to \varepsilon$ растёт как ε^{-1}. Среднеквадратичные значения смещений при этом пропорциональны Δt, как это имеет место для траекторий частиц, совершающих броуновское движение:

$$\left\langle \left[x(t+\Delta t)-x(t) \right]^2 \right\rangle \sim \Delta t. \tag{2}$$

Поэтому, при вычислении измеримых значений наблюдаемых, в которые входят производные по времени, сначала необходимо провести все усреднения при конечном Δt и только затем перейти к пределу очень малых времён $\Delta t \to \varepsilon$. Квантовая механика сформулирована так, что наблюдаемые при этом остаются конечными.

1.2 Переход к малым временам после суммирования по всем альтернативам

В формулировке квантовой механика в формализме интегралов по путям необходимо суммировать по амплитудам вероятностей всех альтернатив. Амплитуды вероятности для нерелятивистской частицы $\psi(x,t)$ и $\psi(x',t')$ связаны как:

$$\psi(x',t') = \int K\left(x',t';x,t\right)\psi(x,t)dx(t), \tag{3}$$

где амплитуда перехода $K(x',t';x,t)$ даётся интегралом по путям [1]:

$$K\left(x',t';x,t\right)=\lim_{\Delta t\to\varepsilon}\prod_{i=1}^{N-1}\int\frac{dx(t_i)}{\sqrt{2\pi i\Delta t/m}}\exp\left\{iL\left[\dot{x}(t_i),x(t_i)\right]\Delta t\right\}. \tag{4}$$

Здесь $N=(t'-t)/\Delta t$, L - лагранжиан.

Здесь временная координата взята дискретной при непрерывных пространственных координатах. Важно то, что *переход к пределу очень малых* Δt в амплитуде перехода (4) должен быть *обязательно после* выполнения всех пространственных интегрирований, то есть *после суммирования по всем альтернативам при данном разбиении временного интервала*.

Если всё же попытаться перейти к очень малым временам *до* пространственных интегрирований, то интеграл по путям в целом будет расходящимся, так как мера *каждого* пространственного интеграла умножается на растущий множитель $\Delta t^{-1/2}\to\varepsilon^{-1/2}$.

Хотя и пространственные интегралы можно было бы взять как суммы конечных разностей, однако в координатном представлении это не существенно, так как к интегрированию в смысле суммирования по очень малым ячейкам можно переходить в каждый момент времени без особых последствий. Тем не менее, в фазовом пространстве и в гамильтоновых континуальных интегралах имеется эффективное ограничение для наименьшей фазовой ячейки значением кванта действия $\Delta x\Delta p\geq h$. В теории поля также необходимо вводить ячейки в пространстве, чтобы не оперировать точечными зарядами.

Итак, и в формулировке интегралов по путям движение квантово-механической частицы в каждый промежуток времени Δt происходит по классическим отрезкам траекторий в пространстве-времени, но траектории квантовомеханического движения фрактальны и не имеют производной по времени в классическом смысле.

В следующей статье [7] будет показано, что на планковских расстояниях из-за гравитационного замедления собственных времён относительно мирового времени t удалённых наблюдателей имеется нижний предел для интервалов мирового времени между причинно-связанными событиями $\Delta t>\tau_p$.

Таким образом, сочетание двух фундаментальных физических явлений – фрактальности квантово-механических траекторий и гравитационное замедление собственных времён ведёт к инвариантной и абсолютной регуляризации интегралов по путям в квантовой теории.

2 Квантование полей на временной решётке

2.1 Фрактальность траекторий в пространстве полевых функций

В квантовой теории поля амплитуда вероятности реализации полевой конфигурации $\varphi(x,t)$ в момент t в точке x есть $\Psi[\varphi(x,t)]$, а в другой момент и в другой точке - $\Psi[\varphi'(x',t')]$. Эти амплитуды вероятности связаны через интегральные уравнения:

$$\Psi\left[\varphi'(x',t')\right]=\int K\left[\varphi(x',t');\varphi(x,t)\right]\Psi\left[\varphi(x,t)\right]D\varphi(x,t), \tag{5}$$

Здесь амплитуда перехода $K[\varphi(x',t');\varphi(x,t)]$ даётся функциональным интегралом [3]:

$$K\left[\varphi(\mathbf{x}',t');\varphi(\mathbf{x},t)\right]=\lim_{\Delta t\to\tau_p}\prod_{i=1}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\Delta t}}\int D\varphi\left(\mathbf{x}'',t_i\right)\times$$
$$\times\exp\left\{i\left[\int L\left[\partial_t\varphi\left(\mathbf{x}'',t_i\right),\varphi\left(\mathbf{x}'',t_i\right)\right]d^3x\,\Delta t\;\right]\right\},\tag{6}$$

где $D\varphi(\mathbf{x}'',t_i)$ - функциональная мера, включающая нормировочные коэффициенты пространственного интегрирования.

Как и в случае траекторий частиц, переход к пределу $\Delta t\to\tau_p$ в амплитуде перехода (4) должен быть обязательно после выполнения всех интегрирований по полевым конфигурациям в определённые моменты времени при данном разбиении временного интервала. Если всё же попытаться перейти к малым временам до интегрирования по полевым конфигурациям, то, также как и в квантовомеханическом случае, амплитуда перехода в целом будет практически расходящейся, так как мера каждого интеграла по полевым конфигурациям в фиксированный момент умножается на очень большой множитель $\Delta t^{-1/2}\to\tau_p^{-1/2}$.

Итак, изменение полевых конфигураций при квантовании происходит по классическим отрезкам траекторий в пространстве полевых конфигураций и времени, но эти траектории в пространстве полевых конфигураций и времени также не имеют производной по времени в классическом смысле и носят фрактальный характер. Хотя роль времени в квантовой теории выделена, тем не менее, при $\Delta t\to\tau_p$ проблем с релятивистской ковариантностью не будет из-за инвариантности планковского времени τ_p.

2.2 Зависимость затравочного лагранжиана от шага временной решётки

Выбирая плотность лагранжиана затравочного скалярного поля φ_0 в виде:

$$L\left[\varphi_0,m_0,\lambda_0,\Lambda_0\right]=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_0\right)\left(\partial^\mu\varphi_0\right)-\frac{m_0^2}{2}\varphi_0^2-\frac{\lambda_0}{4!}\varphi_0^4-\Lambda_0,\tag{7}$$

мы ещё должны дать определение понятия затравочного поля φ_0, а также определить затравочные значения массы квантов поля m_0, константы взаимодействия λ_0 и энергии вакуума поля Λ_0, поскольку, из-за взаимодействия, затравочные величины отличаются от их наблюдаемых, физических значений. С другой стороны, определение затравочных величин также зависит от приближений, сделанных в ходе построения стандартной КТП.

Первое приближение, которое предполагается при определении действия с лагранжианом (7) состоит в том, что до вычисления матричных элементов производные по времени от полевых переменных должны браться в виде конечных разностей по времени, а интегралы от них - в виде сумм конечных разностей. В результате, интеграл по путям в (6) содержит вклады только тех квантов, частоты которых меньше некоторой эффективной частоты $\omega_{\max} = \alpha\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi / \Delta t$ и $\alpha < 1$.

Однако более высокочастотные вклады не могут быть просто отброшены вплоть до планковских времён. Поэтому, второе приближение, которое фактически обычно не осознаётся явно, состоит в том, что вклады квантов с более высокими чем $\omega_{\max}$ частотами *учтены в затравочных значениях поля и констант* лагранжиана (7), которые, таким образом, становятся зависящими от Δt, а значит и от $\omega_{\max}$. Но, поскольку физический лагранжиан $L[\varphi, m, \lambda, \Lambda]$ не зависит от Δt, то процедура квантования поля предполагает разделение вкладов в него в виде:

$$L\left[\varphi, m, \lambda, \Lambda\right] = L\left[\varphi_0, m_0, \lambda_0, \Lambda_0; \Delta t\right] + L\left[\delta\varphi_0, \delta m_0, \delta\lambda_0, \delta\Lambda_0; \Delta t\right]. \tag{8}$$

где затравочный лагранжиан выражает зависящие от Δt вклады в физический лагранжиан квантовых поправок с частотами больше $\omega_{\max}$, т.е. $\omega > \omega_{\max}$, а второй член - лагранжиан контрчленов – содержит зависящие от Δt вклады квантов с частотами меньше $\omega_{\max}$, т.е. $\omega < \omega_{\max}$.

Итак, поскольку мы стартуем с затравочного лагранжиана, то он может быть теперь выражен через физический лагранжиан как:

$$\begin{aligned} L\left[\varphi_0, m_0, \lambda_0, \Lambda_0; \Delta t\right] = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\right)\left(\partial^\mu \varphi\right) - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \\ - \Lambda - L\left[\delta\varphi_0, \delta m_0, \delta\lambda_0, \delta\Lambda_0; \Delta t\right], \end{aligned} \tag{9}$$

где зависимость от Δt обеспечивается лагранжианом контрчленов.

Ранее, в стандартной КТП, действие с затравочным лагранжианом определялся не до, а после предельного перехода к малым временам. В результате, петлевые вклады включали расходимости, хотя и в перенормируемых теориях они исключались введением контрчленов.

В действительности в перенормируемых теориях при корректном предельном переходе $\Delta t \to \tau_p$ остаются конечными как контрчлены, так и потенциально растущие петлевые вклады в физический гамильтониан.

2.3 Теория возмущений с естественной временной регуляризацией

Правило перехода к наименьшему (планковскому) времени $\Delta t \to \tau_p$ после суммирования по всем альтернативам требует небольшой модификации членов ряда теории возмущений. В целом, конечно, всё остаётся как прежде, но интегралы по временам вблизи источников должны оставляться в виде сумм конечных разностей по времени с конечным шагом временной решётки $\Delta t > \tau_p$ до тех пор, пока не будут произведены суммирования по всем альтернативам, что для полей означает интегрирования по энергиям и импульсам. При более строгом подходе введение пространственно-временных ячеек делает дискретными энергии и импульсы тоже, но в практических расчётах этого делать не обязательно и мы можем сохранить удобства стандартной техники вычислений.

В данном разделе отметим лишь некоторые отличия новой трактовки от стандартной. Разложение $S-$матрицы в ряд по степеням константы связи представляется теперь в виде [2]:

$$S = 1 + \sum_{l\geq 1} \frac{1}{l!} \lim_{\Delta t\to\tau_p} \left[\sum_{n_1=1}^{N_1-1} ... \sum_{n_l=1}^{N_l-1} \left(\Delta t\right)^l \int d^3\mathbf{x}_1 ... d^3\mathbf{x}_l S\left(\mathbf{x}_1, n_1; ...; \mathbf{x}_l, n_l; \Delta t\right) \right],$$
$$S\left(\mathbf{x}_1, n_1; ...; \mathbf{x}_l, n_l; \Delta t\right) = i^l T\left[L\left(\mathbf{x}_1, n_1\right) ... L\left(\mathbf{x}_l, n_l\right) \right]. \tag{10}$$

Здесь $l-$степень константы связи, $t_l = n_l \Delta t$ - момент времени, когда происходит взаимодействие в точке $\mathbf{x}_l$. Итак, сначала вычислив элементы матрицы рассеяния при фиксированном $\Delta t > \tau_p$, только потом необходимо переходить к пределу $\Delta t \to \tau_p$.

Отметим, что шаг временной решётки характеризует свойства глобальной ИСО, где процессы описываются. При этом времена во всех точках измеряются идентичными стандартными часами со стандартным разрешением Δt, во всех временных интегралах Δt одинаковы и разбиения их временных интервалов синхронизованы в данной ИСО.

Раскрывая хронологические произведения в (10) и переходя в импульсное представление, получаем обычные правила диаграммной техники, но на временной решётке. Число интегралов по энергиям в вершинах уменьшается за счёт сходимости подынтегральной функции при фиксированных значениях Δt. Поэтому, отделяя из интегралов части, растущие при уменьшении Δt, мы должны считать её квантовой поправкой в затравочный лагранжиан, которая, по определению сокращается с контрчленами. Другая же часть как раз и является той квантовой поправкой, которая ведёт к измеримым эффектам.

В результате, интегралы в каждом порядке ряда теории возмущений конечны. Однако, конечные интегралы можно заменить на более простые *обрезая* стандартные интегралы на планковской энергии $\omega_k < \Lambda_{pl}$. Таким образом, введённые ранее искусственные методы регуляризации стандартной КТП приобретают смысл в той мере, в какой служат аппроксимациями точных и конечных сумм теории возмущений с правильным переходом к малым временам.

Изменение порядка интегрирований и предельных переходов в теории возмущений в локальной КТП влечёт и соответствующее изменение правил диаграммной техники. Их мы рассмотрим в следующем разделе на примере петлевых диаграмм.

3 Конечность петлевых диаграмм при переходе к малым временам

3.1 Конечность однопетлевых диаграмм

Как пример приведём вклад в матрицу рассеяния однопетлевой диаграммы собственной энергии электрона, который приобретает вид [2]:

$$S_{(2)}(p) \sim -e^2 \lim_{\substack{\Delta t \to \tau_p \\ N \to N_p}} \sum_{n=1-N}^{N-1} \Delta t \int \frac{d^4 k dE'}{k^2 + i\varepsilon} \frac{\gamma_\mu \left(\gamma_0 E' - \gamma(\mathbf{p} - \mathbf{k}) + m\right)\gamma^\mu}{E'^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{i(E' + k_0 - E) n \Delta t}, \quad (11)$$

где $E, \mathbf{p}$ - энергия и импульс внешнего электрона. В стандартной КТП сначала производилось интегрирование по времени, что давало дельта-функцию $\delta[E' - (E - k_0)]$, которая снимала интеграл по E', выражая её через $E - k_0$. В результате, появлялся интеграл:

$$I_1(p) = \int \frac{d^4 k}{k^2 + i\varepsilon} \frac{\gamma_\mu \left(\hat{p} - \hat{k} + m\right)\gamma^\mu}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (12)$$

который содержит ультрафиолетовую расходимость.

На самом же деле, как это обосновывалось в предыдущих разделах статьи, для систем с фрактальными траекториями менять местами интегралы нельзя и сначала надо выполнять интегрирования по энергии-импульсу при конечном $\Delta t > \tau_p$. Но, тогда интегралы по энергии и импульсам сходятся и эффективно обрезаются при энергиях порядка планковской энергии $E_p < \Lambda_{pl}$.

Для получения основной части вкладов достаточно считать, что обрезание резкое и происходит точно на планковской энергии $\Lambda_{pl} = 1.221 \times 10^{19}$ ГэВ. При более точном численном расчёте отличие от этого основного вклада составит доли процента. Тогда основное логарифмическое выражение в однопетлевых вкладах равно (при $\alpha = /137.036$):

$$A = \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{pl}^2}{m^2} = 0.239. \quad (13)$$

В пределе $q^2 \to 0$ однопетлевая поправка к поляризационному оператору $\Pi_{(1)}$ и, соответственно $Z_{3(1)}$, а также к квадрату затравочного заряда электрона $\delta e^2 = e^2 - e_0^2$ тогда составят около 8%, что даёт и затравочное значение α_0:

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)} &\approx \frac{1}{3} A = 0.0798 \approx 7.98\%, \\ Z_{3(1)} &= 1 - \Pi_{(1)} \approx 0.92, \\ \alpha_{0(1)} &= \alpha Z_3^{-1} \approx 1/126.1 \end{aligned} \quad (14)$$

Однопетлевая поправка $\delta m = m - m_0$ к затравочной массе электрона m_0 тогда составит около 18%:

$$\delta m_{(1)} \approx \frac{3}{4} A \cdot m = 0.18\, m = 0.092\,\text{МэВ},$$
$$m_{0(1)} \approx 0.82 m = 0.418\,\text{МэВ}, \tag{15}$$
$$Z_{1(1)}^{-1} = Z_{2(1)}^{-1} = 1 - \frac{3}{4} A \approx 0.82.$$

Другие петлевые диаграммы вычисляются аналогично и временная регуляризация во всех случаях достаточна для получения конечных однопетлевых вкладов в матрицу рассеяния.

3.2 Конечность многопетлевых диаграмм

При стандартном доказательстве [2-5] перенормируемости квантовой электродинамики во всех порядках теории возмущений показывается, что вычитания на массовой поверхности $p_{(0)}^2 = m^2$ растущих членов в точных пропагаторах и вершинных функциях эквивалентны мультипликативным перенормировкам:

$$\tilde{S}_F = \frac{1}{Z_2} S'_F\,, \quad \tilde{D}_F = \frac{1}{Z_3} D'_F\,, \quad \tilde{\Gamma}'_\mu = Z_1 \Gamma_\mu\,. \tag{16}$$

При этом показывается, что все расходимости содержатся только в перенормировочных константах $Z_1 = Z_2$, Z_3, и что эти константы вместе с лагранжианом контрчленов ведут к сходящемуся ряду теории возмущений.

Так как при естественной временной регуляризации $\Delta t > \tau_p$ однопетлевые вклады конечны, то многопетлевые вклады, также конечны в каждом порядке теории возмущений.

Далее, в перенормируемых теориях регуляризованные члены ряда собираются в перенормировочные константы Z_i, которые также конечны.

Таким образом, доказательства перенормируемости квантовой электродинамики (и других теорий полей) во всех порядках теории возмущений упрощаются и становятся физически обоснованными и математически корректными.

3.3 Зануление физической энергии вакуума в КТП

Последним расходящимся петлевым вкладом в КТП была сумма вакуумных петлевых диаграмм. При временной регуляризации эти диаграммы также конечны до перехода к малым временам, но после этого должны привести к наблюдаемой плотности физической энергии вакуума Λ. Физическое же значение Λ должно быть взято из эксперимента. Высокоточные измерения и соответствующей точности вычисления аномальных магнитных моментов электрона и мюона без учёта вклада вакуумных полей показывают, что фактически эксперименты дают нам нулевое значение плотности вакуумной энергии $\Lambda = 0$ [6].

Поэтому, принимая во внимание исчезновение энергии вакуума, можем заключить, что по крайней мере эти вклады не ведут к противоречию между физикой частиц и космологией в вопросе о малости космологической постоянной.

4 Некоторые следствие временной регуляризации

4.1 Стандартные регуляризации как следствия временной регуляризации

При временной регуляризации сходимость импульсных интегралов обеспечивается конечностью инвариантной энергии обрезания – планковской энергии. Поэтому, как в стандартной КТП, это обстоятельство эффективно можно учесть путём искусственного понижения степени роста подынтегрального выражения $d^4k\,F(k)$.

Это можно сделать тремя способами. В первом способе можно понизить степень роста подынтегральной функции $F(k)$, во втором уменьшить степень меры интегрирования d^4k и в третьем способе ввести решётку по координатам, обрезающей также и импульсные интегралы.

В истории КТП первый способ использовался в виде введения спадающих при больших энергиях функций или различных методов обрезания энергетических интегралов. Второй способ был реализован в виде размерной регуляризации. Третий, решёточный же подход стал основным инструментом моделирования непертурбативных эффектов.

Все эти методы регуляризации, по сути, являются частными реализациями временной регуляризации, поскольку с математической точки зрения не важно, какими средств обеспечивается сходимость интегралов по энергии, а важна именно сама сходимость. Физической основой этого является именно конечность интегралов по энергии при малых временах.

4.2 Ренормгруппа как следствие подобия во временной регуляризации

Одним из главных свойств фрактальных структур, в том числе и случайных процессов, является подобие, когда часть любой фрактальной структуры имеет те же черты, что и вся структура в целом, а часть этой части также повторяет то же самое. Траектория частицы при броуновском движении и квантовомеханические траектории в интеграле по путям обладают таким же свойством подобия (см. [1]). При этом в последних примерах роль характерных размеров выполняют участки траектории, которые проходятся частицей за время Δt. Если уменьшить шаг решётки времени:

$$\Delta t \to \frac{\Delta t}{n}, \tag{17}$$

то совокупность новых, более укороченных участков траектории будут образовывать такую же извилистую линию, как и до этого, и так далее до очень малых промежутков времени. Матричные элементы для наблюдаемых в квантовой теории, начиная с некоторого небольшого значения Δt, перестают зависеть от дальнейшего сокращении шага временной решётки: $\Delta t \to \Delta t'$.

С другой стороны, в КТП была открыта аналогичная симметрия матричных элементов, названная ренормгруппой, когда в перенормируемых теориях изменение точки вычитания $p^2 = \mu^2$ по внешним импульсам в петлевых диаграммах с соответствующим переопределением параметров лагранжиана не меняет наблюдаемые величины [2-5].

Поскольку при временной регуляризации имеется характерная энергия $\mu_{\Delta t} \sim 1/\Delta t$, то именно эта величина играет роль физически обоснованной точки вычитания в диаграммах. Таким образом, тот факт, что временная регуляризация обладает свойством подобия и содержит естественную точку вычитания $\mu_{\Delta t}$, позволяет интерпретировать ренормгруппу как эмпирически обнаруженное свойство естественной временной регуляризации. Тем самым, ренормгруппа становится фундаментальной симметрией квантовой теории поля, следуя из её первых принципов и выражая свойство подобия фрактальных квантовомеханических траекторий в пространстве полевых функций.

Кроме того, так как временная решётка вводит характерную энергию, то только те теории имеют физическое значение, которые не зависят от этой характерной энергии, а они и есть перенормируемые, или, ренорм-инвариантные теории. Поэтому, свойство перенормируемости приобретает фундаментальное значение и выражает инвариантность относительно нового, обязательного расширения группы релятивистских преобразований систем отсчёта при описании квантовых систем, которую рассмотрим в следующем разделе.

4.3 Общая пространственно-временная симметрия КТП

Стандартная КТП инвариантна при вращениях и трансляциях декартовых систем координат инерциальных систем отсчёта в плоском пространстве-времени:

$$x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu . \tag{18}$$

Здесь группа симметрии – это группа Пуанкаре $ISO(1,3) = SO(1,3) \times T_4$, включающая группу Лоренца и 4 трансляции T_4. Соответствующие генераторы $J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial / \partial x^\nu - x_\nu \partial / \partial x^\mu)$ и $P_\mu = i\partial / \partial x^\mu$, удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{gathered}
\left[P_\mu, P_\nu\right] = 0, \ \left[P_\mu, J_{\nu\rho}\right] = i\left(g_{\mu\nu} P_\rho - g_{\mu\rho} P_\nu\right), \\
\left[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}\right] = i\left(g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}\right).
\end{gathered} \tag{19}$$

Отметим, что физические координатные оси в каждой из ИСО построены с использованием стандартных стержней и синхронизированных стандартных (одинаковых) часов.

Пусть стандартные часы - это световые часы, состоящие из двух параллельных зеркал, между которыми курсируют периодически отражающиеся от них фотоны. Половина периода колебаний $\Delta t = \tau / 2$, когда световой сигнал перемещается от первого зеркала до второго, является минимальным временным интервалом между событиями, которые могут быть измерены посредством этих часов. Поэтому, так построенные ИСО имеют минимальный измеримый интервал времени Δt.

При изменении расстояния между параллельными зеркалами $\Delta l \to \Delta l'$ настолько же изменяется и величина минимального временного интервала: $\Delta t \to \Delta t'$. Это - тривиальная в классической физике симметрия пространства-времени, которая, однако, нетривиальна в квантовой теории из-за фрактальной природы траекторий. Действительно, траектория частицы в интеграле по траекториям в такой временной решётке с шагом Δt аппроксимирована совокупностью N небольших участков классический траектории, в то время как в решётке $\Delta t'$ эта же траектория будет аппроксимирована другим множеством N' классических траекторий. В значениях Δt, достаточно малых относительно характерных времён описываемой системы, интеграл по траекториям практически не меняется при дальнейшем уменьшении шага временной решётки. Эти значения Δt - это область подобия траекторий для данной системы, поскольку свойства системы не меняются при усреднении квантовых флуктуаций во всё меньших и меньших интервалах времени.

При любом уменьшении шага временной решётки мы принимаем во внимание дополнительные флуктуации, описываемые многими новыми диаграммами, которые были подавлены в предыдущих значениях Δt. В статистической физике такая симметрия была обнаружена в форме ренормгруппы, когда при усреднение во всё больших и больших пространственных блоках, начиная с определённой стадии, параметры системы перестают зависеть от дальнейшего укрупнения [3]. Поэтому, область инвариантности относительно преобразований шага временной решётки $\Delta t \to \Delta t'$ - это область ренормгрупповой симметрии квантовых флуктуаций полей. В импульсно-энергетическом представлении эта пространственно-временная симметрия появляется как обычная ренормгрупповая симметрия при перенормировках массы, заряда и полевых функций и здесь аналогия со статистической физикой становится уже скрытой.

Таким образом, общая пространственно-временная симметрия релятивистской квантовой теории - фактически прямое произведение группы Пуанкаре и ренормгруппы $R_{\Delta t}$ на временной решётке: $ISO(1,3) \times R_{\Delta t}$. Такая обобщённая группа симметрии выбирает только класс ренормируемых теорий как инвариантных при этих преобразованиях.

Для иллюстрации рассмотрим волновую функцию для частицы, которая на решётках с шагами Δt и $\Delta t'$ удовлетворяет уравнениям в конечных разностях:

$$\psi(x,t+\Delta t)=\left[1-iH_{\Delta t}\Delta t\right]\psi(x,t),$$
$$\psi(x,t+\Delta t')=\left[1-iH_{\Delta t'}\Delta t'\right]\psi(x,t). \tag{20}$$

Здесь $H_{\Delta t}$ - гамильтониан, само определение которого зависит от Δt через импульсы. Для вариации волновой функции при переходе от одной решётки к другой имеем:

$$\delta\psi(x,t)=\psi(x,t+\Delta t)-\psi(x,t+\Delta t')=$$
$$=\left[1-iH_{\Delta t}\delta\left(\Delta t\right)-i\delta H\,\Delta t\right]\psi(x,t). \tag{21}$$

Свойства системы перестают зависеть от изменений шага временной решётки тогда, когда $\delta H \approx 0$, и эта область и есть область ренормгруппы.

При этом ренормгрупповое расширение группы Пуанкаре близко к вейлевскому расширению, включающему дилатации (растяжения) d-мерных координат:

$$x_\mu^{'} = \lambda x_\mu. \tag{22}$$

Генератор дилатаций:

$$D=-i\left(d+x_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) \tag{23}$$

удовлетворяет коммутационным соотношениям:

$$\left[D,D\right]=0,\ \left[P_\mu,D\right]=iP_\mu,\ \left[J_{\mu\nu},D\right]=0\ . \tag{24}$$

В самом деле, в петлевых интегралах по энергии область ренормгруппы соответствует таким значениям энергий, которые намного превышают все внешние энергии и массы частиц в петле. В таком случае, частицы можно считать безмассовыми, а их движения – происходящими на световом конусе. Тогда симметрия относительно растяжений координат становится понятным и естественным.

Но, тем не менее, ренормгрупповые преобразования шага временной решётки по своей природе противоположны растяжениям временной координаты. В самом деле, пусть имеются два покоящихся ИСО, и пусть часы в первой ИСО имеют разрешение Δt, а во второй - $\Delta t' = \Delta t\,/\,2.$ Если событие произошло в момент времени $t = n\Delta t$ по часам первого ИСО, то это же событие произойдёт в момент $t' = n'\Delta t' = t$ по часам второго ИСО, и при этом: $n' = 2n$. Итак, преобразования шага временной решётки:

$$\Delta t' = \lambda\,\Delta t. \tag{25}$$

оставляют инвариантными временные координаты событий и поэтому:

$$t'=t,\quad n\Delta t = n'\Delta t'. \tag{26}$$

Генератор этих преобразований похож на генератор дилатаций:

$$\tilde{D}=-i\left(1+\Delta t\frac{\partial}{\partial\left(\Delta t\right)}\right). \tag{27}$$

Поскольку временная координата теперь представляется в виде $t = n\Delta t$, то $\tilde{D}$ удовлетворяет коммутационным соотношениям, аналогичным дилатационным:

$$\left[\tilde{D},\tilde{D}\right]=0,\ \left[P_0,\tilde{D}\right]=iP_0,\ \left[J_{\mu\nu},\tilde{D}\right]=0\ . \qquad (28)$$

В общем случае, конечно, можно рассматривать общий случай решётки по всем координатам, но если по пространственным координатам переход к пределу $\Delta x \to l_{pl}$ может быть в любой момент, то в квантовой теории решётка по временной координате принципиальна и неустранима на любом масштабе.

Более детальное обсуждение такого расширения группы пространственно-временных симметрий будет приведено в дальнейших публикациях.

Заключение

Итак, как показано в статье, из самой физической природы квантовых систем следует и это заложено в процедурах квантования, что есть естественное обрезание интегралов по энергии в форме временной регуляризации с минимальным значением этого обрезания порядка планковского времени $\Delta t \to \tau_p$. Это обстоятельство позволяет рассматривать процедуры регуляризации, входящие в методы перенормировок, как следствия именно временной регуляризации.

Более того, поскольку контрчлены в лагранжиане также зависят от степени размельчения времени и конечны при конечном $\Delta t > \tau_p$, то квантовая теория поля вообще не содержит бесконечных перенормировочных констант. Петлевые поправки же при инвариантной гравитационной регуляризации из-за красного смещения на планковской энергии достаточно малы, так что теория возмущений оказывается математически корректной и физически обоснованной.

С устранением проблемы расходимостей в основном завершается долгая история построение квантовой теории поля как самосогласованной и последовательной теории без внутренних противоречий. В дальнейшем при исследовании новых объектов и областей теперь можно быть уверенными, что отклонения от предсказаний КТП будут связаны не с ограниченностью принципов теории, а лишь с недостаточной эффективностью методов расчёта и необходимостью новых моделей структуры материи и пространства-времени в этих новых областях.

Литература

1. Фейнман Р., Хиббс А. (1968) Квант. мех. и инт.по траект., Мир, М.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. (1976) Введ.в теор. квант. полей. Н., М.
3. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. (1988) Введ. квант. т. калибр. полей. Н., М.
4. Weinberg S. (1995-2000) The Quant. Theory of Fields. V. 1-3, CUP.
5. Wilson K.G., Kogut J. (1974) Phys. Rep., 12C, 2, p.75.
6. Закир З. (2006) Теор. физ., астрофиз.и космол. **1**, 1, 12; doi:10.9751/TFAK.2091-002
7. Закир З. (2006) Теор. физ., астрофиз.и космол. **1**, 3, 45; doi:10.9751/TFAK.2119-004