Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **1**, N 1, с. 12 – 29, в1, 22 сентября 2006
Электрон.: ТФАК: 2091-002 в2, 28 сентября 2012 DOI: 10.9751/TFAK.2091-002

T- и *CP*-симметричное квантование полей без нулевой энергии

Захид Закир [1]

Аннотация

При обычной замене отрицательно-частотных операторов релятивистских полей на операторы античастиц обращение времени в билинейных по полям наблюдаемых оказывается неполным. В действительности корректный переход к операторам античастиц происходит только при полном T- или CP-преобразовании матричных элементов. При этом, операторы наблюдаемых T- или CP-симметричных полей со стандартными лагранжианами оказываются нормально-упорядоченными, а нулевая энергия и нулевой заряд не появляются. Сформулированы правила CP-симметричного квантования полей, а также доказана теорема о занулении при этом нулевой энергии. Теорема подтверждается всеми известными экспериментами, поскольку фактически наблюдались только вклады полей реальных источников. Расходящиеся нулевые энергии появляются лишь при использовании лагранжианов, симметризованных относительно комплексно-сопряжённых операторов полей. Теории поля со стандартными лагранжианами дают требуемое наблюдениями зануление вакуумной энергии. В теориях со спонтанно-нарушенной симметрией нулевой энергии и нулевого заряда вакуума нет только если оставшееся скалярное поле комплексное и тогда Стандартная Модель предсказывает пару бозон-антибозон с гиперзарядом.

PACS: 03.70.+k; 11.10.-z; 11.30.Er

Ключевые слова: вакуумная энергия, вакуумные флуктуации, зарядовое сопряжение, эффект Казимира, обращение времени, космологическая константа

Содержание

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики*, *Ташкент, Узбекистан;*
zahidzakir@theor-phys.org

Введение

Предсказание квантовой теорией поля (КТП) нулевых колебаний вакуума полей является одной из наиболее противоречивых проблем физики частиц. Однако, решение этой проблемы весьма важно для прояснения физических основ КТП и для её применений в физике частиц и космологии.

Установившуюся парадигму, ставшей общепринятой в основном по историческим причинам [1-5], можно свести к утверждениям, что:

а) существуют вакуумные нулевые колебания свободных полей, но соответствующие им энергии *расходятся*;

б) эта нулевая энергия *не наблюдаема* (хотя и неясны её гравитационные эффекты) и энергия вакуума может быть *сдвинута к нулю*;

в) эффекты, связанные с *различием спектра* нулевых колебаний полей в некоторых случаях *измеримы* и *уже измерены* в экспериментах (Лэмбовский сдвиг, эффект Казимира).

Однако, как это будет показано в разделе 3.3, во всех известных случаях, где нулевые флуктуации полей должны были бы проявиться и быть измерены в экспериментах, реально наблюдавшиеся эффекты полностью объясняются другими, не вызывающими сомнений взаимодействиями реальных источников [5-8]. Поэтому, из этих экспериментов, вопреки общепринятым мнениям, следует, что фактически нулевые флуктуации полей не обнаружены и, более того, что их вклады с достаточно высокой точностью исключаются существующими экспериментами [8].

Нулевые энергии в стандартной КТП были получены при переходе от произведений операторов отрицательно-частотных частиц к произведениям операторов положительно-частотных античастиц. При этом, альтернативные возможности сокращения нулевых энергий с помощью отрицательно-частотных мод рассматривались с самого раннего периода создания КТП [9-11]. Позднее аналогичные попытки делались в рамках различных моделей, однако, из-за введения ряда искусственных предположений, выходящих за рамки стандартных принципов квантовой механики, например, индефинитной метрики, они не привели к экспериментально подтверждаемым решениям проблемы. Нулевой энергии нет и в суперсимметричном мире, но, как известно, это не решает проблему в реальном мире.

В данной статье стандартные методы квантования уточнены в том отношении, что *исключение отрицательно-частотных мод* релятивистских полей должно производится не сразу в полевых операторах, как это было общепринято, а, ввиду нелинейности операции обращения времени, *в операторных произведениях*. При этом показывается, что для этого достаточно использовать условия CP-симметрии наблюдаемых, которые дают необходимые тождества между операторными произведениями разной частотности. В результате, при использовании стандартных лагранжианов КТП нулевые энергии вакуума и нулевой заряд не возникают. Аналогами же нерелятивистского осциллятора, где есть нулевая энергия, являются симметризованные лагранжианы, рассмотренные в Приложении 2.

1. *CP*-симметричное квантование комплексных полей

1.1 Операторы полей, состояния и наблюдаемые

Пусть имеется заряженная бесспиновая частица массы m, описываемая комплексным скалярными полем φ. Это комплексное поле эквивалентно системе из двух действительных скалярных полей φ_1 и φ_2 одинаковой массы m с лагранжианом:

$$L(x)=\frac{1}{2}\Big[(\partial_\mu\varphi_1)(\partial^\mu\varphi_1)+(\partial_\mu\varphi_2)(\partial^\mu\varphi_2)-m^2\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)\Big]. \qquad (1)$$

Подставив $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, лагранжиан можем записать в симметричном виде:

$$L_s(x)=\frac{1}{2}\Big[\left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right)+\left(\partial_\mu\varphi\right)\left(\partial^\mu\varphi^*\right)-m^2\left(\varphi\varphi^*+\varphi^*\varphi\right)\Big]. \qquad (2)$$

В этот лагранжиан поля φ,φ^* и их производные входят симметричным образом и поэтому лагранжиан инвариантен относительно зарядового сопряжения и обращения времени. Более того, он является полевым аналогом лагранжиана связанных осцилляторов и, из-за наличия симметрии между канонически сопряжёнными переменными, при квантовании соответствующий гамильтониан будет содержать нулевую энергию.

Как было отмечено в [14], в КТП прямая аналогия между спектром гармонического осциллятора и полевыми модами существует только для гамильтонианов полей симметризованных относительно канонически-сопряжённых переменных. Это связано с тем, что положительно- и отрицательно-частотные вклады относятся к разным подпространствам полного фоковского пространства и поэтому значения наблюдаемых имеют прямой физический смысл только в своих подпространствах, а с их суммами по обеим подпространствам необходимо обращаться осторожно. Например, произведения $\partial_\mu\varphi^*\cdot\partial^\mu\varphi$ и $\partial_\mu\varphi\cdot\partial^\mu\varphi^*$ не эквивалентны в каждом из подпространств и их вклады в гамильтониан отличаются на значение нулевых энергий. Эти вклады, имеющие разный знак для вкладов с разными знаками частоты, иногда предлагается взаимно сократить. На деле же, когда оба вклада приводятся к состояниям частиц и античастиц одного и того же знака частоты, их нулевые энергии также имеют одинаковый знак, так что в итоге энергия вакуума системы вместо сокращения удваивается.

Как известно, в случае гармонического осциллятора координаты и импульсы *эрмитовы* операторы, а нулевые колебания имеют ясное физическое обоснование и требуются соотношениями неопределённостей. В нашем же случае эрмитовым обязан быть лагранжиан, а канонические переменные же, т.е. квантовые поля, в общем случае *не являются эрмитовыми* операторами. Более того, лагранжиан должен быть симметричен относительно базового набора операций симметрии КТП и при этом *симметрия между канонически-сопряжёнными переменными не обязательна*. Поэтому, построение лагранжианов полей по полной аналогии со связанными осцилляторами с обязательной симметрией между канонически-сопряжёнными переменными является на деле дополнительной физической гипотезой, ведущей к расходящейся нулевой энергии вакуума.

Свободный лагранжиан скалярного поля может быть выбран, кроме симметризованной формы (2), также в одном из следующих форм:

а) стандартный лагранжиан:

$$L(x)=\left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right)-m^2\varphi^*\varphi\ , \tag{3}$$

б) лагранжиан, комплексно-сопряжённый к стандартному:

$$L_c(x)=\left(\partial_\mu\varphi\right)\left(\partial^\mu\varphi^*\right)-m^2\varphi\varphi^*\ . \tag{4}$$

В качестве лагранжиана для реальной физической системы может быть выбрано только то выражение, которое не ведёт к нарушению базовых симметрий, лежащих в основе КТП, а также не приведёт к физически неприемлемым предсказаниям. В дальнейшем, в качестве такового мы будем рассматривать в основном стандартный лагранжиан (3) по причинам, которые выяснятся далее. Соответствующие ему гамильтониан и оператор заряда также имеют стандартный вид:

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3x\left[\left(\partial_t\varphi^*\right)\left(\partial_t\varphi\right)+\left(\nabla\varphi^*\right)\left(\nabla\varphi\right)+m^2\varphi^*\varphi\right],\\ Q &= i\int \mathrm{d}^3x\left[\varphi^*\left(\partial_t\varphi\right)-\left(\partial_t\varphi^*\right)\varphi\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Гамильтониан является положительно-определённым и на первый взгляд здесь имеются только положительные собственные значения, что обычно отмечается в большинстве учебников. В то же время, после перехода на импульсное представление, у него появятся отрицательные собственные значения для отрицательно-частотных решений из-за линейной зависимости энергии квантов от частоты. Из-за явного внутреннего противоречия в теории этот факт обычно умалчивается. В предыдущей статье [14] было показано, что при изменении знака энергии кванта меняется и знак массы и только тогда нормы состояний останутся положительными. В Приложении 1 показано, как при этом изменится нормировка полевых функций и меняется знак гамильтониана в целом и до перехода к импульсному представлению.

Так как после квантования, энергия будет менять знак при изменении знака частоты, то в данной нормировке полевых функций имеется полная аналогия со свойствами симметрии осциллятора при совместном изменении знаков энергии, массы и частоты [14]. Но, убедившись, что парадокс решается также, как и в случае осциллятора, в статье будем продолжать пользоваться стандартными нормировками, чтобы новые результаты по энергии вакуума не ассоциировались лишь с необычными нормировками.

Лагранжиан (3) даёт уравнения для полевых функций:

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\varphi=0,\qquad \left(\partial_\mu\partial^\mu+m^2\right)\varphi^*=0. \tag{6}$$

Решениями уравнений поля являются, в частности, плоские волны с определённой частотой k_0 и волновым вектором $\mathbf{k}$. Разлагая произвольное поле по этому полному набору и, требуя выполнения релятивистского соотношения между 4-импульсом и массой $k^2=m^2$, необходимо учесть состояния с положительной и отрицательной частотами $k_0=\pm\omega_k$, где $\omega\equiv\omega_k=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$. Поэтому, операторы поля обычно разлагаются на импульсные компоненты, разделяя эти два независимых сектора:

$$\begin{aligned} &\varphi(\mathrm{x})=\sum_{\mathbf{k}}\left[\tilde{a}\left(\omega,\mathbf{k}\right)e^{-i\omega t+i\mathbf{kx}}+\tilde{a}\left(-\omega,-\mathbf{k}\right)e^{i\omega t-i\mathbf{kx}}\right],\ \sum_{\mathbf{k}}\ \equiv\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k},\\ &\varphi^*(\mathrm{x})=\sum_{\mathbf{k}}\left[\tilde{a}^*\left(\omega,\mathbf{k}\right)e^{i\omega t-i\mathbf{kx}}+\tilde{a}^*\left(-\omega,-\mathbf{k}\right)e^{-i\omega t+i\mathbf{kx}}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

При квантовании операторы поля $\varphi(x)$, $\varphi^*(x)$ и соответствующие им импульсы $\partial_t\varphi^*(x)$, $\partial_t\varphi(\mathrm{x})$ удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\left[\varphi(\mathbf{x},t),\partial_t\varphi^*(\mathbf{x}',t)\right]=\left[\varphi^*(\mathbf{x},t),\partial_t\varphi(\mathbf{x}',t)\right]=i\delta^3\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right). \qquad (8)$$

Из них следует, что коэффициенты импульсного разложения становятся операторами рождения-уничтожения квантов поля с соответствующими коммутационными соотношениями. Для операторов одинаковой частотности отличные от нуля коммутаторы имеют вид:

$$\begin{aligned}\left[\tilde{a}(k),\tilde{a}^*(k')\right]&=2\omega_k(2\pi)^3\delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right),\\ \left[\tilde{a}(-k),\tilde{a}^*(-k')\right]&=-2\omega_k(2\pi)^3\delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right),\end{aligned} \qquad (9)$$

Для того, чтобы эти две полевые моды не интерферировали, операторы с противоположной частотностью должны коммутировать. Но, это фактически означает, что эти операторы рождают или уничтожают другой вид частиц, т.е. действуют в разных пространствах состояний. Таким образом, мы имеем дело с расширенным пространством состояний [14], удвоенным по сравнению с положительно частотными состояниями. Такие состояния поля обозначим в виде:

$$\left|n_+;n'_-\right\rangle=\begin{pmatrix}\left|n_+\right\rangle\\ \left|n'_-\right\rangle\end{pmatrix}, \qquad (10)$$

где n_+ - квантовые числа положительно-частотных частиц, а n'_- - отрицательно-частотных. Затем, введём проекционные операторы $P_\pm$ со свойствами: $P_\pm=P_\pm^{-1}=P_\pm^2$, выделяющие из расширенного пространства состояний только состояния определённой частотности:

$$\begin{aligned}P_+\left|n_+;n'_-\right\rangle&=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left|n_+\right\rangle\\ \left|n'_-\right\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left|n_+\right\rangle\\ 0\end{pmatrix}=\left|n_+\right\rangle,\\ P_-\left|n_+;n'_-\right\rangle&=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left|n_+\right\rangle\\ \left|n'_-\right\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \left|n'_-\right\rangle\end{pmatrix}=\left|n'_-\right\rangle.\end{aligned} \qquad (11)$$

Операторы рождения-уничтожения, действующие в соответствующих подпространствах с определённой частотностью, теперь можем построить в виде:

$$\begin{aligned}a(k)&=P_+^{-1}\tilde{a}(k)P_+, \qquad a^*(k)=P_+^{-1}\tilde{a}^*(k)P_+,\\ a(-k)&=P_-^{-1}\tilde{a}(-k)P_-, \qquad a^*(-k)=P_-^{-1}\tilde{a}^*(-k)P_-.\end{aligned} \qquad (12)$$

Здесь обозначены: $a(k)\equiv a(\omega,\mathbf{k}),\ a(-k)\equiv a(-\omega,-\mathbf{k})$. Отметим, что теперь операторы без тильды, в отличие от прежних операторов с тильдой, имеют матричный вид:

$$\begin{aligned}a(k)&=\begin{pmatrix}\tilde{a}(k)&0\\0&0\end{pmatrix}, \qquad a^*\left(k\right)=\begin{pmatrix}\tilde{a}^*(k)&0\\0&0\end{pmatrix},\\ a(-k)&=\begin{pmatrix}0&0\\0&\tilde{a}(-k)\end{pmatrix}, \qquad a^*(-k)=\begin{pmatrix}0&0\\0&\tilde{a}^*(-k)\end{pmatrix}.\end{aligned} \qquad (13)$$

Ненулевые коммутационные соотношения для спроектированных таким образом операторов теперь имеют вид:

$$\begin{aligned}&\left[a(k),a^*(k')\right]=2\omega P_+(2\pi)^3\delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right),\\&\left[a(-k),a^*(-k')\right]=-2\omega P_-(2\pi)^3\delta^3\left(\mathbf{k}-\mathbf{k}'\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Все остальные коммутаторы, включая и коммутаторы операторов разной частотности, равны нулю.

Отметим, что из-за отрицательного знака второго коммутатора в (14) ранее возникала серьёзная трудность – отрицательность нормы состояний, что вело к отрицательным вероятностям. Как было показано в предыдущей статье [14], эта проблема снимается и нормы состояний будут положительными, если правильно учесть изменение знака массы при изменении знака энергии (Приложение 1.)

Состояние вакуума свободного поля $\left|0;0\right\rangle$ определяется как состояние без частиц обеих знаков энергии:

$$a(\pm k)\left|0;0\right\rangle=0, \tag{15}$$

а состояния с одной частицей определяются как:

$$\left|k;0\right\rangle=a^*(k)\left|0;0\right\rangle,\quad \left|0;-k\right\rangle=a^*(-k)\left|0;0\right\rangle. \tag{16}$$

Подставив в (5) рассмотренные импульсные разложения полей, приходим к выражениям:

$$\begin{aligned}&H=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left[a^*(k)a(k)+a^*(-k)a(-k)\right],\\&Q=\sum_{\mathbf{k}}\left[a^*(k)a(k)-a^*(-k)a(-k)\right].\end{aligned} \tag{17}$$

Отметим, что гамильтониан H симметричен относительно изменения знака частоты: $\omega\to-\omega$.

Операторы числа частиц $N_\pm$ с положительной и отрицательной частотами соответственно:

$$N_+=\sum_{\mathbf{k}}a^*(k)a(k),\quad N_-=-\sum_{\mathbf{k}}a^*(-k)a(-k), \tag{18}$$

сохраняются по отдельности:

$$\left[N_\pm,H\right]=0. \tag{19}$$

С их помощью оператор заряда записывается в виде:

$$Q=N_++N_-, \tag{20}$$

что означает полное число частиц обеих знаков энергии.

1.2 *CPT*-преобразования произведений операторов

В стандартной КТП условия причинности требуют, чтобы отрицательно-частотные частицы распространялись только обратно во времени. Поэтому, из симметрии относительно обращения времени следует, чтобы соотношения для отрицательно-частотных операторов были такими же, как и для частиц, но над которыми произведена операция обращения времени T (при необходимости, в сочетании с другими дискретными симметриями).

Операция T для матричных элементов от произведений бозонных операторов в квантовой механике определяется как [3,4]:

$$T\left\langle \omega,\mathbf{k}\right|A\left(\omega,\mathbf{k}\right)B\left(\omega',\mathbf{k}'\right)\left|\omega',\mathbf{k}'\right\rangle T^{-1}= \\ =\left\langle \omega',-\mathbf{k}'\right|B^{+}\left(\omega',-\mathbf{k}'\right)A^{+}\left(\omega,-\mathbf{k}\right)\left|\omega,-\mathbf{k}\right\rangle . \quad (21)$$

Она является нелинейной операцией и включает эрмитово сопряжение операторов и волновых функций, что не только влечёт перестановку начальных и конечных состояний, но также и *перестановку операторов* в операторных произведениях.

Поэтому, если отрицательно-частотную частицу, движущуюся вспять во времени, мы идентифицируем с положительно-частотной античастицей, движущейся вперёд во времени, то стандартная замена операторов (28), производимая на уровне операторов поля, не обеспечивает корректное обращение времени в выражениях для наблюдаемых, включающих *произведения* операторов. Наша задача, таким образом, состоит в том, чтобы обеспечить полное обращение времени произведений операторов в комбинации с зарядовым (или CP) сопряжением.

Отметим, что операция обращения времени в общем случае определена для матричных элементов *в целом*, поскольку включает также и перестановку начального и конечного состояний. Для бозонных полей и билинейных комбинаций фермионных операторов это обстоятельство не играет роли и поэтому, чтобы не усложнять формулы, CPT-преобразования достаточно производить для операторов. Однако, в случае обращения времени с нечётной перестановкой фермионных операторов это обстоятельство надо учитывать.

Рассмотрим стандартные определения дискретных преобразований и их комбинаций в применении к операторам рождения-уничтожения [3-4]:

а) оператор инверсии пространства (P) ведёт только к изменению знака импульсов:

$$P\left[a(\omega,\mathbf{k})\right]P^{-1}=a(\omega,-\mathbf{k}); \quad (22)$$

б) зарядовое сопряжение (C) заменяет операторы частиц на операторы зарядово-сопряжённых античастиц b и b^* с тем же знаком энергии:

$$C\left[a(\omega,\mathbf{k})\right]C^{-1}=b(\omega,\mathbf{k}), \\ C\left[a^*(\omega,\mathbf{k})\right]C^{-1}=b^*(\omega,\mathbf{k}). \quad (23)$$

Итак, при комбинированной инверсии (CP) произведения операторов преобразуются как:

$$CP\left[a^*(\pm\omega,\mathbf{k})a(\pm\omega',\mathbf{k}')\right]P^{-1}C^{-1}=b^*(\pm\omega,-\mathbf{k})b(\pm\omega',-\mathbf{k}'), \\ CP\left[b^*(\pm\omega,\mathbf{k})b(\pm\omega',\mathbf{k}')\right]P^{-1}C^{-1}=a^*(\pm\omega,-\mathbf{k})a(\pm\omega',-\mathbf{k}'). \quad (24)$$

в) операция обращения времени (T), определённая в (21), на произведения бозонных операторов рождения-уничтожения действует так, что операторы в их произведениях переставляются:

$$T\left[a^*(\omega,\mathbf{k})a(\omega',\mathbf{k}')\right]T^{-1}=a^*(\omega',-\mathbf{k}')a(\omega,-\mathbf{k}), \\ T\left[b^*(\omega,\mathbf{k})b(\omega',\mathbf{k}')\right]T^{-1}=b^*(\omega',-\mathbf{k}')b(\omega,-\mathbf{k}); \quad (25)$$

г) наконец, полное CPT-преобразование билинейных выражений имеет вид:

$$\begin{aligned} &TCP\left[a^*(\omega,\mathbf{k})a(\omega',\mathbf{k}')\right]P^{-1}C^{-1}T^{-1} = \\ &= TC\left[a^*(\omega,-\mathbf{k})a(\omega',-\mathbf{k}')\right]C^{-1}T^{-1} = \\ &= T\left[b^*(\omega,-\mathbf{k})b(\omega',-\mathbf{k}')\right]T^{-1} = \\ &= b^*(\omega',\mathbf{k}')b(\omega,\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{26}$$

Точно такие же соотношения имеют место и для CPT-преобразования операторов отрицательно-частотных частиц и их зарядово-сопряжённых частиц тоже с отрицательной энергией:

$$TCP\left[a^*(-\omega,\mathbf{k})a(-\omega',\mathbf{k}')\right]P^{-1}C^{-1}T^{-1} = b^*(-\omega',\mathbf{k}')b(-\omega,\mathbf{k}), \tag{27}$$

Тот факт, что CPT-преобразования не только заменяют операторы частиц на операторы зарядово-сопряжённых им частиц, но и *переставляют операторы* в их произведениях, должен быть учтён при квантовании полей и ниже будут произведены соответствующие уточнения правил квантования.

1.3 Парадокс нарушения зарядовой симметрии в стандартной КТП

В стандартной трактовке квантовой теории поля дополнительно постулировалась процедура прямого отождествления операторов рождения - уничтожения отрицательно-частотных частиц в полевых операторах φ, φ^* с операторами положительно-частотных античастиц b и b^* [3-4]:

$$\begin{aligned} a^*(-k) &= Ca(k)C^{-1} = b(k), \\ a(-k) &= Ca^*(k)C^{-1} = b^*(k), \end{aligned} \tag{28}$$

и этим процедура исключения отрицательно-частотных операторов считалась завершённой.

В результате, энергия и заряд поля приобретали вид:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[a^*(k)a(k) + b(k)b^*(k)\right], \\ Q &= \sum_{\mathbf{k}} \left[a^*(k)a(k) - b(k)b^*(k)\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

Затем, с использованием коммутаторов, они представлялись в виде:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[a^*(k)a(k) + b^*(k)b(k)\right] + H_0 \\ Q &= \sum_{\mathbf{k}} \left[a^*(k)a(k) - b^*(k)b(k)\right] + Q_0. \end{aligned} \tag{30}$$

Эти выражения содержат расходящиеся нулевую энергию H_0 и нулевой заряд Q_0 вакуума со всеми их проблемами. Таким образом, при условиях (28) нулевые энергии возникают не только в симметризованном, но и в стандартном гамильтониане. Далее покажем, что при этом нарушается зарядовая симметрия теории тоже.

Поскольку операторы при зарядовом сопряжении преобразуются как в (23), то после зарядового сопряжения гамильтониана H и заряда Q получаем не их прежние выражения, а новые операторы H_C и Q_C, выраженные через зарядово-сопряжённые операторы:

$$\begin{aligned} H_C &\equiv C H C^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[b^*(k)b(k) + a(k)a^*(k) \right], \\ Q_C &\equiv C Q C^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} \left[b^*(k)b(k) - a(k)a^*(k) \right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Далее учтём, что гамильтониан зарядово-симметричных полей при этом преобразовании не меняется, а заряд, очевидно, меняет знак:

$$H = H_C, \quad Q = -Q_C. \tag{32}$$

Эти условия дают нам, учитывая (29), следующие соотношения между произведениями операторов в каждой моде:

$$\begin{aligned} a^*(k)a(k) + b(k)b^*(k) &= b^*(k)b(k) + a(k)a^*(k), \\ a^*(k)a(k) - b(k)b^*(k) &= -b^*(k)b(k) + a(k)a^*(k). \end{aligned} \tag{33}$$

Складывая и вычитая эти два равенства, мы приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} a^*(k)a(k) &= a(k)a^*(k), \\ b(k)b^*(k) &= b^*(k)b(k). \end{aligned} \tag{34}$$

Таким образом, постулируя (28) и сохраняя зарядовую симметрию, мы приходим к парадоксальному результату, что для удовлетворения условиям зарядовой симметрии операторы рождения-уничтожения должны коммутировать. Это означает, что при выборе лагранжиана (3) стандартная идентификация операторов (28) ведёт к нарушению инвариантности теории относительно зарядового сопряжения и поэтому недопустима.

Простой способ восстановления зарядовой симметрии состоит в использовании симметризованного лагранжиана (2), однако, в таком случае в теории возникают нулевая энергия и нулевой заряд вакуума.

В следующем разделе будет показано, как в случае стандартных лагранжианов этот парадокс может быть разрешён при более аккуратном устранении отрицательно-частотных операторов, но так, чтобы нулевая энергия и нулевой заряд не возникали благодаря свойствам симметрии.

1.4 Зарядово-симметричное исключение отрицательно-частотных операторов

Как видим, CPT-преобразования *не меняют знака энергии* и *связывают произведения операторов только одинаковой частотности*. Поэтому, необходимо дополнительно определить, как от произведений операторов отрицательно-частотных частиц правильно перейти к произведениям положительно-частотных операторов. Для этого нам надо найти некие соотношения, связывающие операторные произведения разных знаков энергии. Можно, конечно, ввести новую операцию симметрии по изменению знака энергии (типа E), в дополнение к известным CPT-преобразованиям.

К счастью, оказывается возможным упростить задачу, пользуясь общими свойствами гамильтониана и оператора заряда при T- или, что согласно CPT-теореме эквивалентно, при CP-преобразованиях, которые ока-зываются проще. А именно, чтобы выразить все отрицательно-частотные билинейные произведения через положительно-частотные оказывается достаточным знать свойства наблюдаемых при CP-преобразованиях.

Поскольку произведения операторов в случае заряженных (и P-чётных) полей преобразуются как в (26) и (27), то после операции зарядового сопряжения гамильтониана H и заряда Q получаем новые операторы H_C и Q_C, выраженные через операторы, зарядово-сопряжённые к прежним:

$$\begin{aligned} H_C &\equiv C\,H\,C^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[b^*(k)b(k) + b^*(-k)b(-k) \right], \\ Q_C &\equiv C\,Q\,C^{-1} = \sum_{\mathbf{k}} \left[b^*(k)b(k) - b^*(-k)b(-k) \right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Далее, условия зарядовой симметрии гамильтониана и антисимметрии оператора заряда (32) дают нам, с учётом (17) и (35), следующие соотношения между операторными произведениями:

$$\begin{aligned} a^*(k)a(k) + a^*(-k)a(-k) &= b^*(k)b(k) + b^*(-k)b(-k), \\ a^*(k)a(k) - a^*(-k)a(-k) &= -b^*(k)b(k) + b^*(-k)b(-k). \end{aligned} \tag{36}$$

Складывая и вычитая эти два равенства, находим необходимые нам *тождества* между произведениями бозонных операторов разной частоты:

$$a^*(k)a(k) = b^*(-k)b(-k), \tag{37}$$

$$a^*(-k)a(-k) = b^*(k)b(k). \tag{38}$$

Второе тождество есть лишь зарядово-сопряжённая форма первого.

Пользуясь найденными тождествами (37) и (38), теперь можем найти конечные выражения для гамильтониана и заряда скалярного поля, содержащие вклады только *положительно-частотных* частиц и античастиц:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[a^*(k)a(k) + b^*(k)b(k) \right], \\ Q &= \sum_{\mathbf{k}} \left[a^*(k)a(k) - b^*(k)b(k) \right]. \end{aligned} \tag{39}$$

В итоге, 4-импульс и 4-вектор тока в терминах положительно-частотных операторов выражаем в виде:

$$\begin{aligned} P_\mu &= \sum_{\mathbf{k}} k_\mu \left[a^*(k)a(k) + b^*(k)b(k) \right], \\ J_\mu &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_\mu}{\omega_k} \left[a^*(k)a(k) - b^*(k)b(k) \right]. \end{aligned} \tag{40}$$

Хотя, в конечном итоге, в выражениях для H и Q произведены те же самые замены (28), что и в прежних трактовках, тем не менее, благодаря корректному учёту требований симметрии относительно зарядового сопряжения, *операторы античастиц оказались нормально-упорядоченными без дополнительных гипотез*, а *нулевая энергия и нулевой заряд вакуума не возникли*.

Случай *симметризованных лагранжианов*, являющийся точным аналогом нерелятивистского осциллятора, рассмотрен в Приложении 2, где показано что при этом *появляются расходящиеся нулевые энергии* для частиц и античастиц и поэтому для релятивистских полей такие лагранжианы фактически исключаются существующими экспериментами.

1.5 *Квантование при спонтанном нарушении симметрии*

Гамильтониан системы полей при спонтанном нарушении симметрии в конечном итоге представляет собой гамильтониан взаимодействующих (массивных и/или безмассовых) полей. Состояние с минимальной энергией и есть основное состояние, которое представляет собой вакуум после квантования малых флуктуаций около этого основного состояния. Поэтому, после соответствующего "сдвига" полей с ненулевыми вакуумными средними и приравнивания к нулю энергии состояния с минимальной энергией, CP-симметричное квантование свободного гамильтониана каждого из полей можно производить по методике, рассмотренной в предыдущих разделах.

Лагранжиан системы из $SU(2)$ калибровочного поля A_μ^a и изодублета комплексных скалярных полей $\tilde{\varphi},\tilde{\varphi}^*$ имеет вид:

$$L(x)=\frac{1}{4g}F_{\mu\nu}^aF_a^{\mu\nu}+(D_\mu\tilde{\varphi}^*)(D^\mu\tilde{\varphi})-\lambda^2\left(\tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}-\eta^*\eta\right)^2. \qquad (41)$$

где $\eta=const$ комплексная константа, $D_\mu=\partial_\mu+ig\tau^aA_\mu^a/2$ и

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_1\\ \tilde{\varphi}_2\end{pmatrix},\quad \tilde{\varphi}^*(x)=\left(\tilde{\varphi}_1^*,\tilde{\varphi}_1^*\right). \qquad (42)$$

Затем комплексное поле $\tilde{\varphi}_1$ исключим калибровочным преобразованием, а для второго поля введём комплексное скалярное поле φ,φ^* с нулевой асимптотикой на бесконечности:

$$\tilde{\varphi}_2(x)=\eta+\varphi(x),\quad \tilde{\varphi}_2^*(x)=\eta^*+\varphi^*(x). \qquad (43)$$

Тогда лагранжиан полей (41) переходит в:

$$L(x)=-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a\right)^2+(\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi)-m^2\varphi^*\varphi-\frac{1}{2}\lambda^2\left|\eta\right|^2A_\nu^aA^{a\nu}+L_{\text{int}}. \qquad (44)$$

с массой $m=\lambda\left|\eta\right|$ для поля φ.

Комплексное скалярное поле далее квантуется по рассмотренному выше методу без нулевой энергии и нулевого заряда вакуума. Квантование же калибровочных полей будет рассмотрено в последующих публикациях.

Таким образом, для того, чтобы вакуум скалярного поля не обладал расходящимися нулевой энергией и нулевым зарядом, достаточно, чтобы спонтанное нарушение симметрии происходило так, чтобы оставшееся скалярное поле $\tilde{\varphi}_2$ оставалось бы комплексным и его зарядовая симметрия сохранилась. В таком случае Стандартная Модель будет предсказывать не один скалярный бозон, а пару бозон-антибозон, отличающиеся знаком гиперзаряда, как и до спонтанного нарушения симметрии.

1.6 Квантование спинорного поля

Спинорные поля имеют следующее импульсное разложение:

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{x})&=2m\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left[b_\alpha(k)u_\alpha e^{-i\omega t+i\mathbf{kx}}+b_\alpha(-k)v_\alpha e^{i\omega t-i\mathbf{kx}}\right],\\ \psi^+(\mathrm{x})&=2m\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left[b_\alpha^+(k)u_\alpha^+e^{i\omega t-i\mathbf{kx}}+b_\alpha^+(-k)v_\alpha^+e^{-i\omega t+i\mathbf{kx}}\right].\end{aligned} \qquad (45)$$

При квантовании коэффициенты становятся операторами рождения-уничтожения с антикоммутаторами, из которых ненулевыми являются:

$$\left\{b_\alpha(\pm k), b^+_{\alpha'}(\pm k')\right\} = \frac{\omega_k}{m}(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta_{\alpha\alpha'}P_\pm. \tag{46}$$

Как и в случае бозонных полей, мы расширили пространство состояний, считая отрицательно-частотные состояния отдельным подпространством. В результате, операторы разной частотности антикоммутируют, поскольку действуют в разных фоковских пространствах.

Выражения для энергии и заряда поля:

$$\begin{aligned} H &= i\int d^3x\left[\psi^+\partial_t\psi - (\partial_t\psi^+)\psi\right], \\ Q &= \int d^3x\psi^+\psi, \end{aligned} \tag{47}$$

после подстановки импульсного разложения приобретают вид:

$$\begin{aligned} H &= 2m\sum_{\mathbf{k},\alpha}\omega_k\left[b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) - b^+_\alpha(-k)b_\alpha(-k)\right], \\ Q &= 2m\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left[b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) + b^+_\alpha(-k)b_\alpha(-k)\right]. \end{aligned} \tag{48}$$

Для соответствующих зарядово-сопряжённых операторов имеем:

$$\begin{aligned} d_\alpha(k) &= Cb_\alpha(k)C^{-1}, \quad d_\alpha(-k) = C\,b_\alpha(-k)C^{-1}, \\ d^+_\alpha(k) &= Cb^+_\alpha(k)C^{-1}, \quad d^+_\alpha(-k) = C\,b^+_\alpha(-k)C^{-1}. \end{aligned} \tag{49}$$

В терминах этих операторов, *C*-сопряжённые гамильтониан и оператор заряда имеют вид:

$$\begin{aligned} H_C &= 2m\sum_{\mathbf{k},\alpha}\omega_k\left[d^+_\alpha(k)d_\alpha(k) - d^+_\alpha(-k)d_\alpha(-k)\right], \\ Q_C &= 2m\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left[d^+_\alpha(k)d_\alpha(k) + d^+_\alpha(-k)d_\alpha(-k)\right]. \end{aligned} \tag{50}$$

Из них, используя свойства зарядовой симметрии гамильтониана и антисимметрии заряда (32), получаем следующие соотношения между операторными произведениями:

$$\begin{aligned} b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) - b^+_\alpha(-k)b_\alpha(-k) &= d^+_\alpha(k)d_\alpha(k) - d^+_\alpha(-k)d_\alpha(-k), \\ b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) + b^+_\alpha(-k)b_\alpha(-k) &= -\,d^+_\alpha(k)d_\alpha(k) - d^+_\alpha(-k)d_\alpha(-k). \end{aligned} \tag{51}$$

Складывая и вычитая эти два равенства, находим искомые операторные тождества:

$$\begin{aligned} b^+_\alpha(k)b_\alpha(k) &= -d^+_\alpha(-k)d_\alpha(-k), \\ b^+_\alpha(-k)b_\alpha(-k) &= -\,d^+_\alpha(k)d_\alpha(k). \end{aligned} \tag{52}$$

Эти два тождества переходят друг в друга при зарядовом сопряжении. В результате, получаем окончательные выражения для гамильтониана и оператора заряда фермионов, выраженных в терминах положительно-частотных операторов:

$$H = 2m\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left[b_\alpha^+(k)b_\alpha(k) + d_\alpha^+(k)d_\alpha(k)\right],$$
$$Q = 2m\sum_{\mathbf{k}}\left[b_\alpha^+(k)b_\alpha(k) - d_\alpha^+(k)d_\alpha(k)\right]. \tag{53}$$

Таким образом, при зарядово-симметричном квантовании фермионного поля нулевая энергия и нулевой заряд также не возникают, а операторы для наблюдаемых и здесь оказываются нормально-упорядоченными автоматически. В общем случае киральных полей необходимо использовать, конечно, симметрию относительно комбинированной CP-симметрии.

2. CP-симметричное квантование в общем и структура вакуума

2.1 Правила CP-симметричного квантования полей

Итак, стандартные правила операторного квантования приводят к нулевым энергиям и нулевым зарядам полей из-за того, что свойства обращения времени учтены не полностью и поэтому они должны быть модифицированы. В предыдущих разделах было показано, как произведения отрицательно-частотных операторов можем исключить для случаев комплексных бозонных и спинорных полей при более точном использовании условий CP-симметрии. Теперь мы можем сформулировать изменённые процедуры в общей форме как *дополнения к правилам квантования*, обращая внимание только на их отличия от стандартных. Таким образом, основные этапы CP-*симметричного квантования* релятивистских полей (или CP-*квантования*), следующие:

1. Лагранжиан комплексного поля, из-за наличия отрицательно-частотного сектора, берётся в стандартной форме, которая эрмитова, но не симметризована относительно комплексно-сопряжённых операторов поля.

2. Положительно- и отрицательно-частотные состояния образуют отдельные фоковские пространства, а их объединение образует расширенное пространство состояний, где действуют обобщённые операторы в матричной форме из-за проецирования в подпространства с определённой частотностью.

3. Импульсное разложение полевых операторов ведёт к операторам рождения-уничтожения положительно- и отрицательно-частотных мод, которые действуют в соответствующих подпространствах и удовлетворяют соответствующим перестановочным соотношениям.

4. Вводятся операторы для зарядово-сопряжённых частиц обеих знаков энергии и наблюдаемые выражаются через матричные элементы от произведений операторов рождения-уничтожения обеих частотностей.

5. Используя условия CP-симметрии наблюдаемых (энергии, заряда), получаются тождества, связывающие произведения отрицательно-частотных операторов с произведениями положительно-частотных операторов. С помощью этих тождеств все наблюдаемые выражаются через произведения положительно-частотных операторов для частиц и античастиц.

Как было показано на примере отдельных полей, только совокупность этих дополнительных правил, естественным образом следующих из CP-симметричности теории, позволяет согласовать процедуры квантования с требованиями CPT-симметрии, а значит, и с первыми принципами КТП.

И наконец, все эти процедуры эквивалентны простой процедуре *нормального упорядочения* операторов в наблюдаемых, принятой в стандартной КТП. Поэтому, *операцию нормального упорядочения можем теперь считать узаконенной и следующей из базовых симметрий теории*.

2.2 Теорема о занулении нулевой энергии вакуума

Один из важных результатов предыдущих разделов сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема *При квантовании CP-симметричных релятивистских полей со стандартными (не симметризованными относительно полевых операторов) лагранжианами операторы наблюдаемых полей нормально-упорядочены из-за условий симметрии, а нулевая энергия и нулевой заряд вакуума равны нулю*.

Поскольку эти утверждения были проверены для каждого из основных релятивистских полей (скалярного, векторного и спинорного), то теорему можем считать доказанной путём индукции, а её доказательство в общем виде будет рассмотрено в предстоящих публикациях.

Интуитивно появление нулевой энергии полей ассоциировалось с тем фактом, что поля представлялись как наборы осцилляторов, а при квантовании каждый осциллятор совершает нулевые флуктуации. В статье [14] показано, что как для частиц, так и для античастиц в нерелятивистском осцилляторном потенциале возникают положительные нулевые энергии. При этом, причиной появления нулевых энергий является не переход от отрицательно-частотных операторов к положительно-частотным, а только наличие в гамильтониане симметризованных произведений операторов одинаковой частотности. Аналогом гамильтониана нерелятивистского осциллятора являются гамильто-нианы, симметризованные относительно полевых операторов, рассмотренные в Приложении 2, где нулевые энергии возникают. Поэтому, в случае лагранжианов не содержащих такие симметризации, в гамильтонианах нулевые энергии полей не появляются, что как раз и соответствует случаю стандартных лагранжианов КТП.

Тот факт, что при *CP*-симметричном квантовании полей со стандартными лагранжианами снимаются проблемы с нулевой энергией вакуума означает, что в случае свободных полей квантовая теория поля является внутренне самосогласованной и непротиворечивой теорией, ведущей для корректно поставленных задач только к физически корректным результатам без дополнительных гипотез.

2.3 Эксперименты, исключающие нулевые флуктуации полей

Если, как это стало общепринятым [3-4], признать реальное существование нулевой энергии вакуума, тогда возникает ряд противоречий этой гипотезы с экспериментом. Выясняется, что такие эффекты как Лэмбовский сдвиг, аномальные магнитные моменты и эффект Казимира можно объяснить почти полностью как проявления нулевых флуктуаций вакуумных полей и, в то же время, они прекрасно описываются как результат взаимодействия реальных частиц с реальными источниками. Здесь важно ясное понимание того обстоятельства, что приводимые в литературе два вида объяснений эффектов являются не альтернативными способами расчёта одного и того же явления, а *двумя независимыми механизмами, вклады которых в наблюдаемые эффекты аддитивны и складываются*.

Если рассмотреть существующие эксперименты подробнее и в каждом случае постараться выделить тот вклад нулевых флуктуаций, который можно считать бесспорным, который нельзя было бы объяснить вкладами реальных источников, то в каждом случае выясняется, что такого вклада нет. Перечислим основные из них.

1. Если есть нулевые флуктуации вакуума электромагнитного поля, то они сдвигают S и P уровни водородоподобных атомов по разному [2] и относительный сдвиг должен быть почти равен наблюдаемому значению Лэмбовского сдвига. Кроме того, нулевые флуктуации вакуума должны дать такой же вклад в аномальные магнитные моменты частиц, что и кванты полей и внешние поля источников (см. [5]). Однако, наблюдения и точные расчёты во всех случаях показывают, что достаточно взаимодействия зарядов только с квантами полей (петлевые поправки) и полями источников, без учёта взаимодействий с нулевыми флуктуациями поля. Поскольку реальность вкладов в сдвиг виртуальных квантов и внешних полей источников бесспорна, то ясно, что в экспериментах по Лэмбовскому сдвигу и аномальным магнитным моментам именно они и наблюдаются и, таким образом, эти эксперименты фактически с большой точностью исключают существование нулевых колебаний электромагнитного поля.

2. Широко распространённая трактовка эффекта Казимира состоит в том, будто именно в этом случае мы имеем дело с прямым проявлением нулевых колебаний вакуума электромагнитного поля. Однако, также хорошо известно, что эффект Казимира полностью сводится к вкладам электромагнитных полей реальных источников - атомов в твёрдых телах [5-7]. В частности, известная теория Лифшица и её обобщения [5-7] основаны на том, что источниками флуктуирующего электромагнитного поля являются атомы в кристаллической решётке и, в частности, флуктуирующие поля, порождённые *колебаниями атомов* (не вакуумных полей!) в кристалле при нулевой температуре, что полностью объясняет эффект Казимира, представляя его как разновидность сил Ван-дер-Ваальса. Поэтому, эксперименты по измерению эффекта Казимира также фактически исключают существование нулевых колебаний вакуума самого электромагнитного поля.

3. Наличие очень большой нулевой энергии вакуума привело бы к такой же большой космологической постоянной. На самом же деле, с учётом наблюдательных данных, космология даёт такую малую верхнюю границу для плотности нулевой энергии вакуума, которая с точки зрения физики частиц означает равенство её нулю.

Итак, наблюдения показывают, что только один из механизмов, связанный с учётом вклада излучения реальных источников, полностью объясняет каждый из эффектов и что поэтому эксперименты с большой точностью исключают дополнительный вклад нулевых флуктуаций вакуумных полей. Экспериментальные свидетельства отсутствия нулевых флуктуаций фактически являются экспериментальными подтверждениями доказанной выше теоремы о занулении нулевой энергии.

Заключение

Таким образом, только спектр релятивистских полей с лагранжианами симметризованными относительно комплексно сопряжённых полей подобен спектру нерелятивистского осциллятора, где есть нулевая энергия. Как показано в статье, вакуум релятивистских полей со стандартными лагранжианами, не симметричными по комплексно-сопряжённым полям, не содержит нулевой энергии и нулевого заряда из-за условий *T*- и *CP*-симметрии. Стандартные правила операторного квантования свободных полей уточнены для соответствия с основными дискретными симметриями КТП.

То, что нулевые флуктуации вакуума не существуют для реально наблюдавшихся полей, подтверждён экспериментами с высокой точностью. Поэтому для релятивистских полей симметризованные по комплексно-сопряжённым полям лагранжианы исключены и для них можно вводить только стандартные лагранжианы без нулевых флуктуаций вакуума.

Когда гипотеза Дирака о заполненном море отрицательно-энергетических фермионов была заменена фейнмановской процедурой обращения времени для введения античастиц, исчезли многочисленные внутренние противоречия прежней гипотезы. В данной статье показано, что из-за той же симметрии относительно обращения времени нет нужды и в гипотезе о нулевых флуктуациях вакуума со всеми её проблемами. В то же самое время, этот факт легализует процедуру нормального упорядочения как упрощённый метод учёта требований симметрий теории.

При спонтанном нарушении симметрии нулевая энергия и нулевой заряд вакуума отсутствуют если оставшееся скалярное поле комплексное и Стандартная Модель предсказывает пару бозон-антибозон с гиперзарядом.

Приведённое в статье естественное исключение из формализма КТП нулевых флуктуаций вакуума с их расходящимися нулевой энергией и нулевым зарядом без новых гипотез или математических трюков, это первый шаг для окончательной формулировки КТП. В последующих публикациях будет показано, что при правильном определении некоторых операций КТП не содержит также и расходящиеся вакуумные петлевые вклады. Важным последствием этого результата будет тот факт, что все известные вакуумные эффекты, включая малость наблюдаемой космологической константы, можно естественным образом объяснить в рамках стандартных принципов КТП без дополнительных гипотез и что в настоящее время в действительности нет противоречия между физикой частиц и космологией.

Приложения

1. Нормировка полей с знакопеременным гамильтонианом

В обычной нормировке полей складывалась странная ситуация, когда положительно-определённый гамильтониан при квантовании приводил к отрицательным энергиям для отрицательно-частотных решений из-за линейной зависимости от частоты. Далее покажем, что есть другая нормировка, когда гамильтониан не является положительно–определённым и при изменении знака массы энергия также меняет знак, что и требуется условиями релятивистской причинности.

Лагранжиан заряженного скалярного поля φ запишем в виде:

$$L(x) = \mu\left[(\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2\varphi^*\varphi\right]. \tag{54}$$

Здесь нормировка полевых функций отличается от стандартной фактором $\mu^{1/2}$, чтобы сохранить формальную аналогию с цепочкой нерелятивистских осцилляторов [14] с новым параметром массы «атомов цепочки» μ, а m играет роль частоты осцилляций около фиксированного центра. Для системы действительных скалярных полей φ_1 и φ_2 тогда имеем:

$$L(x)=\frac{\mu}{2}\left[(\partial_\mu\varphi_1)(\partial^\mu\varphi_1) + (\partial_\mu\varphi_2)(\partial^\mu\varphi_2) - m^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\right] \tag{55}$$

Гамильтониан и оператор заряда поля в этой нормировке имеют вид:

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}^3x \left[\frac{1}{\mu}\pi\pi^* + \mu(\nabla\varphi^*)(\nabla\varphi) + \mu m^2\varphi^*\varphi\right], \\ Q &= i\int \mathrm{d}^3x\,(\varphi^*\pi^* - \pi\varphi), \quad \pi = \mu\partial_t\varphi^*. \end{aligned} \tag{56}$$

Уравнения поля при этом не меняются, для операторов поля имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{x}) &= \sum_{\mathbf{k}}\left[\tilde{a}(k)e^{-i\omega t + i\mathbf{kx}} + \tilde{a}(-k)e^{i\omega t - i\mathbf{kx}}\right], \quad \sum_{\mathbf{k}} \equiv \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3 2\mu\omega_k}, \\ \varphi^*(\mathrm{x}) &= \sum_{\mathbf{k}}\left[\tilde{a}^*(k)e^{i\omega t - i\mathbf{kx}} + \tilde{a}^*(-k)e^{-i\omega t + i\mathbf{kx}}\right]. \end{aligned} \tag{57}$$

Одновременные коммутационные соотношения:

$$\left[\varphi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{x}',t)\right] = \left[\varphi^*(\mathbf{x},t), \pi^*(\mathbf{x}',t)\right] = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \tag{58}$$

дают для коммутаторов положительно-определённые выражения:

$$\left[\tilde{a}(\pm k), \tilde{a}^*(\pm k')\right] = 2\mu\omega_k(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{59}$$

Итак, параметр «массы атомов цепочки осцилляторов» μ входит в гамильтониан (56) линейно, при совместном изменении знаков частоты, энергии и массы μ нормы состояний положительны для обеих случаев.

Переход же к обычной нормировке полевых функций и их обобщённых импульсов производится не полаганием $\mu \to 1$, а более корректной заменой $\mu \to \pm 1$ в зависимости от знака частоты и энергии.

2. Поля с симметризованными лагранжианами

В терминах комплексных полей достаточно, чтобы лагранжиан был эрмитовым как в (3). Однако, можно дополнительно потребовать, чтобы лагранжиан был ещё и симметризованным по сопряжённым полям как в (2). Гамильтониан и оператор заряда поля тогда приобретают вид:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\{\partial_t\varphi^*, \partial_t\varphi\} + \{\nabla\varphi^*, \nabla\varphi\} + m^2\{\varphi^*, \varphi\}\right], \\ Q &= \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^3x\left[\{\varphi^*, \partial_t\varphi\} - \{\partial_t\varphi^*, \varphi\}\right], \end{aligned} \tag{60}$$

где $\{A,B\} = AB + BA$. Импульсные разложения ведёт к гамильтонианам:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[a^*(k)a(k) + a(k)a(k) + a^*(-k)a(-k) + a(-k)a^*(-k) \right], \qquad (61)$$

$$H_C = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[b^*(k)b(k) + b(k)b^*(k) + b^*(-k)b(-k) + b(-k)b^*(-k) \right]. \qquad (62)$$

Оператор заряда имеет вид:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \left[a^*(k)a(k) + a(k)a^*(k) - a^*(-k)a(-k) - a(-k)a^*(-k) \right], \\ Q_C &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \left[b^*(k)b(k) + b(k)b^*(k) - b^*(-k)b(-k) - b(-k)b^*(-k) \right], \end{aligned} \qquad (63)$$

Учитывая свойства зарядовой симметрии, далее получаем тождества:

$$\begin{aligned} a^*(k)a(k) + a(k)a^*(k) &= b^*(-k)b(-k) + b(-k)b^*(-k) \\ a^*(-k)a(-k) + a(-k)a^*(-k) &= b^*(k)b(k) + b(k)b^*(k). \end{aligned} \qquad (64)$$

Используя которые, для гамильтониана и оператора заряда получаем:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[a^*(k)a(k) + a(k)a^*(k) + b^*(k)b(k) + b(k)b^*(k) \right] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left[a^*(k)a(k) + b^*(k)b(k) \right] + H_{(0)}, \end{aligned} \qquad (65)$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \left[a^*(k)a(k) + a(k)a^*(k) - b^*(k)b(k) - b(k)b^*(k) \right] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \left[a^*(k)a(k) - b^*(k)b(k) \right]. \end{aligned} \qquad (66)$$

Здесь $H_{(0)}$- это нулевая энергия, возникающая в теориях с симметризованными лагранжианами, например у нерелятивистского осциллятора [14].

В теориях же релятивистских полей симметризованные лагранжианы ведут к расходящейся нулевой энергии вакуума и оказываются противоречащими эксперименту. Поэтому для них допустимы только лагранжианы несимметризованные относительно сопряжённых полей без нулевой энергии.

Литература

1. Casimir H.B.G. (1948) Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, p. 793.
2. Welton T.A. (1948) *Phys. Rev*. **74**, p.1157.
3. Бьёркен Дж.Д., Дрелл С.Д. (1978) Релят. квант. теория, т.1, М.
4. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. (1984) Квант. теор. поля, т.1, М.
5. Milonni P.W. (1994) Quantum Vacuum. Acad. Press.
6. Casimir, H. B.G., Polder D. (1948) *Phys. Rev*. **73**, 360
7. Лифшиц Е.М. (1955) ЖЭТФ, 29, 894.
8. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. (1978) Стат. физ., ч.2 (том 9).
9. Бараш Ю.С., Гинзбург В.Л. (1984) УФН, **143**, 3, с. 345.
10. Jaffe R.L. (2005) *Phys. Rev*. **D72**, 021301; arXiv:hep-th/0503158.
11. Jordan P., Pauli, W. (1928) Z. Phys., **47**, 151.
12. Dirac P.A.M. (1942) Proc. Roy. Soc., London, **A114**, 243, 710.
13. Pauli W. (1943) Rev. Mod. Phys., **15**, 175.
14. Закир З. (2006) Теор. физ., астрофиз. и космол., **1**, 1, 1; doi: 10.9751/TFAK.2091-001