Теоретическая физика, астрофизика и космология ISSN 1991-3117; ISSN 1991-3907 (эл.)
Том **1**, N 1, с. 1 – 11, в1, 22 сентября 2006

Электрон.: ТФАК: 2091-001 в2, 28 сентября 2012
DOI: 10.9751/TFAK.2091-001

Симметрии гармонического осциллятора порождающие нулевые и отрицательные энергии

Захид Закир [1]

Аннотация

Гамильтониан гармонического осциллятора симметричен относительно канонически сопряжённых переменных и канонические преобразования к лестничным операторам сохраняют эту симметрию. Гамильтониан выражается через симметризованные произведения повышающих и понижающих операторов и, в результате, при квантовании появляется нулевая энергия. Поэтому для квантовых полей, канонически сопряжённые переменные которых входят в гамильтонианы не симметричным образом, нулевых энергий может и не быть. Найдена новая симметрия гармонического осциллятора: волновое уравнение и его решения не меняются при совместном изменении знаков частоты, энергии и массы частицы. Показано, что проблема отрицательной нормы состояний для отрицательно-частотных состояний появлялась из-за положительности массы при отрицательной энергии и что эта проблема снимается при изменении знака массы с изменением знака энергии, требуемой релятивистской кинематикой. В нерелятивистской теории, рассматриваемой как предел релятивистской, состояния частицы с отрицательными частотой, энергией и массой описаны последовательно, как идущие обратно во времени и представляющие состояния её античастицы с положительными частотой, энергией и массой, идущие вперёд во времени. Для такой зарядово-симметричной системы осцилляторов построено расширенное пространство состояний с обобщёнными операторами.

PACS: 03.65.Ge, 11.30.Er, 1130.Ly, 11.90.+t

Ключевые слова: Гамильтонова динамика, дискретные симметрии, обращение времени, квантование

Содержание

[1] *Центр теоретической физики и астрофизики*, Ташкент, Узбекистан;
zahidzakir@theor-phys.org

Введение

Квантованный гармонический осциллятор играет ключевую роль в современной физике, так как различные системы, в особенности, свободные релятивистские поля, квантуются по аналогии с ним. В квантовой теории поля (КТП) использованы в основном два свойства гармонического осциллятора – формализм повышающих-понижающих (лестничных) операторов и нулевая энергия для основных состояний. Однако, удивительно то, что в моделях КТП нулевые энергии появляются по несколько иной причине, чем в гармоническом осцилляторе [1-3].

В квантовой механике нулевая энергия осциллятора формально следует из симметризованного произведения лестничных операторов, а с физической точки зрения этого требуют соотношения неопределённостей. В отличие от этих симметрийных и физических причин, в КТП нулевые энергии обычно появляются при переходе от лестничных операторов для отрицательно-частотных частиц $a(-k)\,,a^{*}(-k)$ к операторам для положительно-частотных античастиц $b(k)\,,b^{*}(k)$ где $k=(\omega_k,\mathbf{k}),\omega_k=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$.

В связи с этим, представляет интерес понять истинные причины появления или отсутствия нулевой энергии в квантованных системах, особенно, роль соответствующих свойств симметрии системы, а также то, как нулевые энергии связаны с отрицательно-частотными состояниями.

В первом разделе статьи рассматриваются свойства симметрии гамильтонианов квантованных систем, приводящие к нулевым энергиям. Во втором разделе квантовая механика гармонического осциллятора формулируется в расширенном пространстве состояний, включающем и отрицательно-частотные моды. Применение аналогичного метода к релятивистским полям приводится в следующей в статье [4], где показана её эффективность при решении проблемы нулевой энергии вакуума.

1. Симметрия, ведущая к нулевой энергии

1.1. Нулевая энергия для осциллирующей частицы

Спектр частицы в потенциале гармонического осциллятора содержит нулевую энергию из-за соотношений неопределённостей, то есть из-за фундаментальной физической причины. Нетрудно убедиться, что в формализме теории это физическое требование удовлетворено симметрией гамильтониана относительно взаимной замены канонически сопряжённых переменных p и $x'=m\omega x$:

$$H=\frac{1}{2m}\left[p^2+(m\omega x)^2\right]=\frac{1}{2m}\left(p^2+x'^2\right). \tag{1}$$

Действительно, канонические преобразования к повышающим и понижающим (лестничным) операторам:

$$a(\omega) \equiv a(\omega, m) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega x + ip\right),$$
$$a^*(\omega) \equiv a^*(\omega, m) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(m\omega x - ip\right). \tag{2}$$

сохраняют эту симметрию и приводят к симметризованному произведению лестничных операторов. Тогда, при нормальной расстановке операторов в симметризованном произведении, появляется нулевая энергия:

$$H = \frac{1}{2}\omega\left(a^*a + aa^*\right) = \omega\left(a^*a + \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Однако, как известно, можно рассмотреть также и не симметризованные произведения канонических переменных, которые являются эквивалентными на классическом уровне, но приводят к различным квантованным гамильтонианам $H_{(+)}$ и $H_{(-)}$:

$$H_{(+)} = \omega a^* a = \frac{1}{2m}\left(m\omega x - ip\right)\left(m\omega x + ip\right) = H - \frac{i}{2}\omega\left[p, x\right] = H - \frac{1}{2}\omega,$$
$$H_{(-)} = \omega a a^* = \frac{1}{2m}\left(m\omega x + ip\right)\left(m\omega x - ip\right) = H + \frac{i}{2}\omega\left[p, x\right] = H + \frac{1}{2}\omega. \tag{4}$$

Как видим, оба гамильтониана являются эрмитовыми, и, кроме того, в $H_{(+)}$ операторы нормально упорядочены и у него нет нулевой энергии. При этом *они не симметричны относительно прямой замены канонически-сопряжённых переменных*. Однако, такая симметрия может быть восстановлена, если, в дополнение к замене канонических переменных, мы заменяем между собой и эти два типа гамильтонианов тоже: $H_{(\pm)} \to H_{(\mp)}$, то есть если мы обобщаем операцию симметрии.

В квантовой механике существуют веские физические причины, почему нужно взять как физический гамильтониан не $H_{(+)}$, а именно $H = H_{(+)} + \omega / 2$, поскольку только последний выбор находится в соответствии с соотношениями неопределённостей и экспериментом. Но, для других осциллирующих систем типа полей, можно взять как гамильтониан H, если система имеет нулевую энергию, или можно взять $H_{(+)}$, если система не содержит нулевой энергии. В любом случае основные симметрии теории и эксперимент позволяют выбрать допустимый вариант гамильтониана [4].

1.2. Нулевые энергии для квантованных полей

В КТП прямая аналогия между спектром гармонического осциллятора и полевыми модами существует только для гамильтонианов симметризованных относительно канонических переменных. Как будет показано ниже, положительно- и отрицательно-частотные вклады относятся к разным подпространствам общего фоковского пространства. Поэтому значения их наблюдаемых, имеющие прямой физический смысл в своих подпространствах, при суммировании по обоим подпространствам могут исказить физическую картину в системе.

Например, произведения $\partial_\mu\varphi^* \cdot \partial^\mu\varphi$ и $\partial_\mu\varphi \cdot \partial^\mu\varphi^*$ не эквивалентны в каждом из подпространств и поэтому для скалярного поля лишь лагранжиан:

$$L=\frac{1}{2}\Big[\left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right)+\left(\partial_\mu\varphi\right)\left(\partial^\mu\varphi^*\right)-m^2\left(\varphi^*\varphi+\varphi\varphi^*\right)\Big]. \qquad (5)$$

ведёт к гамильтониану, симметризованному в обоих подпространствах:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left[a^*(k)a(k)+a(k)a^*(k)+a^*(-k)a(-k)+a(-k)a^*(-k)\right]. \qquad (6)$$

После *общепринятой* замены отрицательно-частотных операторов на операторы положительно-частотных античастиц:

$$a(-k)=b^*(k), \quad a^*(-k)=b(k) \qquad (7)$$

нулевые энергии $H_{(0)}/2$ появляются в обоих подпространствах:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left[a^*a+aa^*+bb^*+b^*b\right]=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left(a^*a+b^*b\right)+H_{(0)}\ . \qquad (8)$$

Здесь нулевая энергия появилась по той же причине, что и в гармоническом осцилляторе, то есть при переходе от симметризованных произведений операторов рождения-уничтожения к нормально-упорядоченным как для частиц, так и для античастиц.

Однако в КТП обычно используются стандартные эрмитовые лагранжианы не симметризованные относительно комплексно-сопряжённых переменных. В случае заряженного скалярного поля имеем:

$$L=\left(\partial_\mu\varphi^*\right)\left(\partial^\mu\varphi\right)-m^2\varphi^*\varphi\ , \qquad (9)$$

и здесь нет симметрии относительно прямой замены полей φ^*, φ. В результате, в гамильтониане операторы рождения-уничтожения появляются как нормально-упорядоченные для обоих знаков энергии:

$$H=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left[a^*(k)a(k)+a^*(-k)a(-k)\right]. \qquad (10)$$

Обычно в этом выражении нулевая энергия появляется как результат замены операторов для отрицательно-частотных частиц на операторы для положительно-частотных античастиц и расположения последних в нормально-упорядоченном виде:

$$\begin{aligned} H&=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left[a^*(k)a(k)+b(k)b^*(k)\right]= \\ &=\sum_{\mathbf{k}}\omega_k\left[a^*(k)a(k)+b^*(k)b(k)\right]+H_{(0)} \end{aligned} \qquad (11)$$

Отметим, что здесь нулевая энергия связана с существованием отрицательно-частотных мод поля, или античастиц, независимо от симметрий лагранжиана. В следующем разделе мы рассмотрим, как могут быть учтены строго и интерпретированы физически отрицательно-частотные моды гармонического осциллятора и затем сможем ответить на вопрос о связи нулевой энергии с отрицательно-частотными состояниями.

2. Расширенное пространство состояний осциллятора

2.1. Обращение времени и отрицательно-частотные моды

Уравнения Шредингера для волновых функций $\psi(x,t)$ и $\psi^*(x,t)$ при подстановке волновых функций для стационарных состояний в виде:

$$\psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)e^{-iE_nt},\quad \psi^*(x,-t)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(x)e^{iE_n(-t)}, \tag{12}$$

дают одинаковые уравнения для стационарных состояний:

$$H\psi_n(x)=E_n\psi_n(x),\qquad H\psi_n^*(x)=E_n\psi_n^*(x). \tag{13}$$

Их решения, очевидно, также одинаковы, т.е. пространственная часть волновой функции вещественна: $\psi_n^*(x)=\psi_n(x)$.

Итак, уравнения для стационарных состояний и их решения не меняются при следующих преобразованиях:

а) обращение времени $t\to -t$ и комплексное сопряжение:

$$\psi^*(x,-t)=\psi(x,t). \tag{14}$$

Но эта симметрия эквивалентна двум другим аналогичным симметриям:

б) $t\to t, E\to -E$ и комплексное сопряжение: $\psi(x,t)\to\psi^*(x,t)$;

в) $t\to -t, E\to -E$, но без комплексного сопряжения.

Две последние симметрии обычно не рассматриваются всерьёз из-за появления состояний с отрицательными энергиями. Однако нерелятивистский предел теорий релятивистских частиц содержит такие состояния, которые затем должны переводиться в состояния античастиц. Поэтому, решения с отрицательной энергией должны быть учтены и для нерелятивистских волновых уравнений.

Случай гармонического осциллятора особенно важен потому, что характерная для него нулевая энергия в квантово-полевых моделях появляется при переходе от отрицательно-частотных операторов частиц к положительно-частотным операторам античастиц. В связи с этим, далее рассмотрим роль отрицательно-частотных мод и в спектре осциллятора.

Отрицательно-частотные моды осциллятора изучались ещё в ранний период создания квантовой теории поля [1-3]. Однако, из-за введения разных искусственных предположений, в частности, отрицательных вероятностей, эти идеи считались попытками выхода за рамки стандартных принципов квантовой механики. Далее будет показано, что эти моды могут быть последовательно описаны и поняты без дополнительных гипотез.

2.2. Симметрия между положительно- и отрицательно-частотными модами

При квантовании полей обращённым во времени частицам соответствуют моды с отрицательной энергией, а значит, в системе покоя и с отрицательной массой. Поэтому, рассматривая нерелятивистский предел для частицы, имеющей античастицу и совершающей осцилляции, необходимо включение в теорию осциллятора также и состояний с отрицательной энергией (массой).

Гамильтониан осциллятора (1) описывает колебания с обоими знаками частоты $\pm\omega$, и меняет знак только при изменении знака массы $m \to -m$. В то же время, собственные значения энергии квантованного осциллятора:

$$E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{15}$$

меняют знак только при изменении знака частоты $\omega \to -\omega$. Но, в случае нерелятивистского осциллятора простое изменение знака массы или частоты по отдельности приводит к недопустимым изменениям свойств системы и поэтому многие попытки в этом направлении не привели к физически осмысленным результатам.

Однако, эта задача упрощается и решается достаточно просто благодаря наличию *новой симметрии*. А именно, *при одновременном изменении знаков частоты, энергии и массы:*

$$\omega \to -\omega, \quad E_n \to -E_n, \quad m \to -m, \tag{16}$$

волновое уравнение и его решения остаются неизменными. В самом деле, волновое уравнение для стационарных состояний:

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \left[2mE_n - (m\omega)^2 x^2\right]\psi_n = 0, \tag{17}$$

и его решения:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2} H_n\left(m\omega x\right) \tag{18}$$

содержат только попарные произведения $m\omega$ и mE_n, так что при совместном изменении знаков m, ω и E_n остаются теми же самыми.

Соответствующие лестничные операторы (2), понижающие и повышающие энергию системы, не меняются при совместном изменении знаков частоты и массы:

$$a(-\omega,-m) = a(\omega,m), \quad a^*(-\omega,-m) = a^*(\omega,m) \tag{19}$$

Поэтому гамильтониан для отрицательно-частотных мод будет точно таким же, как и для положительно-частотных, но с противоположным знаком частоты. При квантовании, из коммутаторов для координаты и импульса следуют коммутаторы:

$$\left[a(\pm\omega), a^*(\pm\omega)\right] = 1, \quad \left[a(\pm\omega), a(\pm\omega)\right] = \left[a^*(\pm\omega), a^*(\pm\omega)\right] = 0. \tag{20}$$

В результате, полный гамильтониан и оператор числа квантов $N\left(\pm\omega\right)$ приобретают вид:

$$H = \frac{1}{2}\omega\left[a^*(\omega)a(\omega) + a(\omega)a^*(\omega)\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\omega\left[a^*(-\omega)a(-\omega) + a(-\omega)a^*(-\omega)\right], \tag{21}$$
$$N(\pm\omega) = a^*(\pm\omega)a(\pm\omega).$$

Но, тут возникают кажущиеся трудности, так как волновые функции этих новых, отрицательно-частотных уровней *не ортогональны* волновым функциям положительно-частотных уровней, а также появляются ненулевые коммутаторы положительно-частотных операторов с отрицательно-частотными. Всё это, конечно недопустимо, так как ведёт к *смешиванию уровней разной частотности* и к нестабильности системы.

Тем не менее, как будет показано далее, при более адекватном представлении состояний волновые функции и операторы двух типов мод осциллятора ортогональны, а операторы разной частотности коммутируют.

С этой целью введём *проекционные операторы* $P_\pm$, выделяющие из общей волновой функции ψ_n состояния с положительной и отрицательной частотностями соответственно:

$$P_+\psi_n = \psi_{n(+)}, \quad P_-\psi_n = \psi_{n(-)}, \tag{22}$$

и которые обладают свойствами:

$$P_\pm^2 = P_\pm, \quad P_\pm^{-1} = P_\pm, \quad P_+P_- = P_-P_+ = 0. \tag{23}$$

Конкретную матричную реализацию таких проекционных операторов рассмотрим в следующем разделе, а пока будем пользоваться лишь их общими свойствами.

В результате такого проецирования волновые функции $\psi_{n(+)}$ и $\psi_{n(-)}$ оказываются нормированными, вероятности - положительными, а волновые функции разной частотности становятся взаимно ортогональными:

$$\int \psi^+_{n(\pm)}\psi_{n'(\pm)}dx = \delta_{nn'}, \quad \int \psi^+_{n(\pm)}\psi_{n'(\mp)}dx = 0, \tag{24}$$

где $\psi^+_{n(\pm)} = \psi^*_n P_\pm^{-1}$. С помощью этих проекционных операторов мы можем определить и соответствующие повышающие и понижающие операторы с определённой частотностью:

$$a_\pm = P_\pm^{-1} a P_\pm, \quad a_\pm^+ = P_\pm^{-1} a^+ P_\pm. \tag{25}$$

Теперь гамильтониан и операторы числа квантов $N_\pm$ приобретают вид:

$$H = H_+ + H_- = \frac{1}{2}\left\{\omega\left[a_+^+ a_+ + a_+ a_+^+\right] - \omega\left[a_-^+ a_- + a_- a_-^+\right]\right\},$$
$$N_\pm = a_\pm^+ a_\pm. \tag{26}$$

Из свойств коммутации (20) получаем коммутационные соотношения для спроецированных операторов:

$$\left[a_\pm, a_\pm^+\right] = P_\pm, \quad \left[a_\pm, a_\pm\right] = \left[a_\pm^+, a_\pm^+\right] = 0, \tag{27}$$

а также, что очень важно, зануление коммутаторов операторов разной частотности:

$$\left[a_{\pm}, a_{\mp}^{+}\right] = \left[a_{\pm}^{+}, a_{\mp}^{+}\right] = \left[a_{\pm}, a_{\mp}\right] = 0. \qquad (28)$$

С учётом этих соотношений, гамильтониан имеет вид:

$$H = \omega\left[a_{+}^{+}a_{+} + \frac{1}{2}P_{+}\right] - \omega\left[a_{-}^{+}a_{-} + \frac{1}{2}P_{-}\right]. \qquad (29)$$

Таким образом, полный спектр энергий осциллятора теперь включает не только положительные, но и отрицательные энергии. При этом *нулевые энергии появляются в обоих секторах и связаны только с присутствие в гамильтониане симметризованных произведений* повышающих и понижающих *операторов одинаковой частотности*.

2.3. Расширенное пространство состояний и обобщённые операторы

Итак, осциллирующая частица в общем случае имеет две моды колебаний - с положительной частотой, массой и энергией, а также с отрицательными их значениями. Поскольку волновые функции этих двух мод $\psi_{n(+)}$, $\psi_{n'(-)}$ теперь взаимно ортогональны, то *поместим их в два разных фоковских пространства, считая их относящимися к двум разным частицам*. Объединение этих двух пространств тогда составит *расширенное пространство состояний*, которое и будет полным пространством состояний осциллятора, описывающего осцилляции в нерелятивистском пределе системы из частицы и античастицы.

Обобщённую волновую функцию гармонического осциллятора, содержащей обе моды, представим в виде:

$$\Psi_{n,n'}^{+} = \begin{pmatrix}\psi_n^* & \psi_{n'}^*\end{pmatrix}, \qquad \Psi_{n,n'} = \begin{pmatrix}\psi_n \\ \psi_{n'}\end{pmatrix}. \qquad (30)$$

Проекционные операторы затем можно взять в матричном представлении:

$$P_{+} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad P_{-} = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad (31)$$

что даёт:

$$\Psi_{n(+)} = P_{+}\Psi_{n,n'} = \begin{pmatrix}\psi_n \\ 0\end{pmatrix}, \qquad \Psi_{n'(-)} = P_{-}\Psi_{n,n'} = \begin{pmatrix}0 \\ \psi_{n'}\end{pmatrix}. \qquad (32)$$

Обобщённые волновые функции $\Psi_{n(\pm)}$ нормированы для каждой моды, но взаимно ортогональны:

$$\begin{aligned} &\int \Psi_{n(\pm)}^{+}\Psi_{n'(\pm)}dx = \delta_{nn'}, \\ &\int \Psi_{n(\pm)}^{+}\Psi_{n'(\mp)}dx = 0, \end{aligned} \qquad (33)$$

Далее, в данном представлении операторы $a_{\pm}$, $a_{\pm}^{+}$ также становятся 2×2 матрицами:

$$a_+ = \begin{pmatrix} a(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_+^+ = \begin{pmatrix} a^*(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a(-\omega) \end{pmatrix}, \qquad a_-^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^*(-\omega) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Они действуют на обобщённые волновые функции как:

$$a_+ \Psi_{n(+)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\psi_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{n}\,\psi_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{n}\,\Psi_{n-1,(+)},$$
$$a_+^+ \Psi_{n(+)} = \sqrt{n+1}\,\Psi_{n+1,(+)}, \tag{35}$$

а также:

$$a_- \Psi_{n'(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\psi_{n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{n'}\,\psi_{n'-1} \end{pmatrix} = \sqrt{n'}\,\Psi_{n'-1,(-)},$$
$$a_-^+ \Psi_{n'(-)} = \sqrt{n'+1}\,\Psi_{n'+1,(-)}. \tag{36}$$

Основное состояние:

$$\Psi_{0,0} = \begin{pmatrix} \psi_0(\omega, m) \\ \psi_0(-\omega, -m) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_{0(+)} \\ \psi_{0(-)} \end{pmatrix} \tag{37}$$

теперь определяется двумя соотношениями:

$$a_+ \Psi_{0,0} = P_+^{-1} a P_+ \Psi_{0,0} = \begin{pmatrix} a(\omega)\psi_{0(+)} \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$
$$a_- \Psi_{0,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ a(-\omega)\psi_{0(-)} \end{pmatrix} = 0. \tag{38}$$

Как видим, для осцилляций с положительной энергией основное состояние $\psi_{0(+)}$ стабильно, поскольку из него нельзя напрямую спуститься в состояния с отрицательной энергией. Новым является и тот факт, что и для осцилляций с отрицательной энергией основное состояние $\psi_{0(-)}$ также стабильно в том смысле, что из него нельзя напрямую перейти в состояния с положительной энергией (оператор $a_-(-\omega)$ повышает энергию состояния). Более того, теперь переходы между уровнями с положительной энергией осуществляют кванты с положительной энергией, а между уровнями с отрицательной энергией – кванты с отрицательной энергией. Проблемы со стабильностью отрицательно-энергетических состояний появлялись только тогда, когда *незаконно* предполагалось, что переходы между такими состояниями происходят путём испускания положительно-частотных квантов. Если в вершине взаимодействия имеются состояния обеих знаков частоты, то все такие состояния необходимо перевести на одинаковый знак частоты и только тогда можно делать заключения о балансе энергий.

Гамильтониан теперь также представляется в матричном виде:

$$\tilde{H} = \omega \begin{pmatrix} a^*(\omega)a(\omega) & 0 \\ 0 & -a^*(-\omega)a(-\omega) \end{pmatrix} + \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Операторы чисел квантов $N_\pm$, определённые в (26), коммутируют с гамильтонианом и числа квантов с определённым знаком энергии сохраняются по отдельности:

$$\left[N_\pm, \tilde{H}\right] = 0. \tag{40}$$

Поэтому, в отличие от стандартного осциллятора, включающего только положительные энергии, в системе из двух типов осцилляторов имеются два сохраняющихся квантовых числа. Из их комбинаций можем образовать также сохраняющиеся *оператор полного числа квантов*:

$$N = N_+ + N_- = a_+^+ a_+ + a_-^+ a_-, \tag{41}$$

и *оператор «квазизаряда»* системы:

$$Q = N_+ - N_- = a_+^+ a_+ - a_-^+ a_-. \tag{42}$$

Обращение времени в случае осциллятора, как оказалось, равносильно изменению знака частоты. При этом, полное число квантов *N* не меняется, тогда как квазизаряд *Q*, если ненулевой, меняет знак.

2.4. Реинтерпретация отрицательно-частотных состояний

Выше мы оперировали с отрицательно-частотными модами наравне с положительно-частотными. Это оправдано до тех пор, пока мы не выберем определённое направление течения времени. Пусть это направление выбрано положительным, когда допустимы только положительно-энергетические состояния.

Тогда отрицательно-энергетические состояния не могут быть просто отброшены и в последовательной нерелятивистской теории, рассматриваемой как предел релятивистской, должны быть преобразованы в положительно-энергетические состояния античастиц. Соответствующий гамильтониан системы осциллирующих частиц и античастиц тогда приобретает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \omega\left[a_+^+ a_+ + \frac{1}{2}P_{+(a)}\right] + \omega\left[b_+^+ b_+ + \frac{1}{2}P_{+(b)}\right] = \\ &= \omega \begin{pmatrix} a^*(\omega)a(\omega) & 0 \\ 0 & b^*(\omega)b(\omega) \end{pmatrix} + \frac{\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{43}$$

Если осцилляторный потенциал действует на частицу и античастицу одинаковым образом, т.е. потенциал не зависит от знака их заряда, то кванты двух видов осцилляторов становятся неразличимыми. При этих условиях гамильтониан системы приобретает стандартный вид с одним типом квантов и с нулевой энергией:

$$\tilde{H} = \omega\left(a^*(\omega)a(\omega) + \frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Таким образом, рассмотренная вначале симметрия между положительно- и отрицательно-частотными состояниями осциллятора является выражением в нерелятивистском пределе комбинированной симметрии относительно обращения времени и зарядового сопряжения.

Заключение

Итак, нулевая энергия следует только из симметрии между канонически-сопряжёнными переменными в гамильтониане и не зависит от существования отрицательно-частотных мод. Более того, отрицательно-частотные моды также имеют нулевые энергии, которые после обращения времени появляются как нулевые энергии колеблющихся античастиц.

Имеется новая симметрия наблюдаемых и состояний гармонического осциллятора относительно одновременного изменения знаков частоты, энергии и массы колеблющейся частицы. При этом отрицательная масса есть лишь (релятивистская) отрицательная энергия частицы в системе покоя. С учётом этой симметрии нормы отрицательно-частотных состояний оказываются положительными.

Состояния частицы с отрицательными частотой, энергией и массой интерпретируются как состояния античастицы с положительными частотой, энергией и массой. Таким образом, квантование гармонического осциллятора, принимая во внимание его свойства симметрии, позволяет описывать полный спектр состояний колеблющихся частиц и античастиц непротиворечивым образом без каких-либо новых гипотез.

Однако, в системах без такой симметрии между канонически-сопряжёнными переменными в гамильтониане прямая аналогия с гармоническим осциллятором в вопросе о нулевой энергии некорректна. Это относится и к квантованным полям со стандартными гамильтонианами, которые эрмитовы, но не симметричны относительно канонически-сопряжённых переменных. То, что это действительно так и что квантовые поля со стандартными (не симметризованными) гамильтонианами при условии зарядовой симметрии не содержат нулевой энергии, показано в следующей статье [4].

Литература

1. Jordan P., Pauli, W. (1928) *Z. Phys.,* **47**, 151.
2. Dirac P.A.M. (1942) *Proc. Roy. Soc., London*, **A114**, 243, 710.
3. Pauli W. (1943) *Rev. Mod. Phys.,* **15**, 175.
4. Закир З. (2006) *Теор. физ., астрофиз. и космол.,* **1**, 1, 12; doi: 10.9751/TFAK.2091-002